Corrigé du contrôle continu
Vendredi 09 décembre 2005

Exercice 1

1) Pour construire l'intervalle de confiance pour m_X, on utilise un bon estimateur de m_X. Soit donc $\bar{X}_n$ un estimateur convergent de m_X.
Cherchons maintenant une fonction pivotale fonction de $\bar{X}_n$. Comme $n > 30$, on peut appliquer le théorème central limite à l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$.
Alors $Z = \dfrac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} = \sqrt{n}\ \dfrac{\bar{X}_n - m_X}{\sigma_X}$ suit approximativement une loi $N(0,1)$.
Comme la variance σ_X^2 est inconnue, on la remplace dans la va Z par son estimateur convergent $\hat{S}_n^2$.
D'où $Z = \sqrt{n}\ \dfrac{\bar{X}_n - m_X}{\hat{S}_n}$ suit approximativement une loi $N(0,1)$.

Posons $0.95 = P(-t < Z < t)$ oú le quantile $t = 1,96$ est lu dans la table de la loi normale.

D'où $\bar{x}_n\ - 1,96\dfrac{\hat{s}_n}{\sqrt{n}}\ <\ m_X\ <\ \bar{x}_n\ +\ 1,96\dfrac{\hat{s}_n}{\sqrt{n}}$.

AN: $\bar{x}_n = 32.1875$, $s_n^2 = 675.7773$, $\hat{s}_n^2 = 697.5766$. On obtient donc

$$23.0363 < \ m_X\ < \ 41.3387$$

2) - estimation sans biais de la moyenne m_X: $\bar{x}_n = 30.875$
- estimation sans biais de la variance $\hat{s}_n^2 = 218.6964$.

On ne peut pas construire un intervalle de confiance pour la moyenne m_X en utilisant la même méthode que celle utilisée dans la question précédente car on peut pas appliquer le TCL car $n < 30$.

Exercice 2

1) f est positive car a, θ et x sont positifs.

$\int f(x)dx = \dfrac{1}{\theta\ a^{1/\theta}} \displaystyle\int_0^a x^{(\frac{1}{\theta}\ -1)}dx = \dfrac{1}{\theta\ a^{1/\theta}}\ [\theta x^{\frac{1}{\theta}}\ ]_0^a = 1$

2) $L_\theta(x_1,...,x_n) = \dfrac{1}{\theta^n \ a^{n/\theta}} \displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i^{(\frac{1}{\theta}\ -1)} \ \mathbf{1}_{\ infx_i>0}\mathbf{1}_{\ sup\ x_i<a}$

3) L_θ est dérivable par rapport à θ.
Si $infx_i > 0$ et $sup\ x_i < a$, on peut écrire

$ln(L_\theta(x_1,...,x_n)) = -n\ ln(\theta) - \dfrac{n}{\theta}\ ln(a) + (\dfrac{1}{\theta}\ -1)\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)$.

$\dfrac{\delta ln(L_\theta)}{\delta\theta} = -\dfrac{n}{\theta}\ + \dfrac{n}{\theta^2}\ ln(a) - \dfrac{1}{\theta^2}\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)$.

Cherchons $\hat\theta_n$ tel que $-\dfrac{n}{\hat\theta_n}\ + \dfrac{n}{\hat\theta_n^2}\ ln(a) - \dfrac{1}{\hat\theta_n^2}\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} ln(x_i) = 0$.

$\dfrac{n}{\hat\theta_n}\ = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\hat\theta_n^2}\ ln(a) - \dfrac{1}{\hat\theta_n^2}\ \sum_{i=1}^{n} ln(x_i) = \dfrac{1}{\hat\theta_n^2}\ \sum_{i=1}^{n} ln\left(\dfrac{a}{x_i}\right)$.

D'où $\hat\theta_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ln\left(\dfrac{a}{x_i}\right)$ est un extremum. Vérifions que c'est un maximum.

$\dfrac{\delta^2 ln(L_\theta)}{\delta^2\theta} = \dfrac{n}{\theta^2} - \dfrac{2}{\theta^3}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ln\left(\dfrac{a}{x_i}\right)$ qui prend comme valeur en $\hat\theta_n$:

$\dfrac{n}{\hat\theta_n^2} - \dfrac{2}{\hat\theta_n^3}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ln\left(\dfrac{a}{x_i}\right) = \dfrac{n}{\hat\theta_n^2} - \dfrac{2n}{\hat\theta_n^3}\hat\theta_n = -\dfrac{n}{\hat\theta_n^2} < 0$

On a donc montré que $T_n = \hat\theta_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ln\left(\dfrac{a}{X_i}\right)$ est l'emv de θ.

On note dans la suite $Y = ln\left(\dfrac{a}{X}\right)$. On donne $E(Y) = \theta$ et $Var(Y) = \theta^2$.

4) $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ Y_i$ (voir 3).

5) $E(T_n) = E(Y) = \theta$ donc T_n est un esb de θ.

6) Comme T_n est un esb de θ, le risque quadratique est donné par $R_\theta = Var(T_n) = Var(Y)/n = \theta^2/n$ qui converge vers 0 quand n tend vers l'infini, donc T_n est un estimateur convergent de θ.

7) $I_n(\theta) = -E(\dfrac{\delta^2 ln(L_\theta(X_1,...,X_n))}{\delta^2\theta}) = -E\left(\dfrac{n}{\theta^2} - \dfrac{2}{\theta^3}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) =$

$-\dfrac{n}{\theta^2} + \dfrac{2}{\theta^3}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = -\dfrac{n}{\theta^2} + \dfrac{2}{\theta^3}\theta = \dfrac{n}{\theta^2}\ .$

8) On voit que $I_n(\theta) = \dfrac{1}{var(T_n)}$ et T_n est un esb de θ alors l'estimateur T_n est un estimateur

efficace de θ.

9) On peut appliquer le théorème central limite à l'échantillon $(Y_1, ..., Y_n)$. Alors $Z = \dfrac{\bar{Y}_n - E(\bar{Y}_n)}{var(\bar{Y}_n)} = \sqrt{n}\,\dfrac{T_n - \theta}{\theta}$ suit approximativement une loi $N(0,1)$.

10) Pour construire l'intervalle de confiance pour θ, on utilise un bon estimateur de θ. Soit donc T_n un estimateur convergent, efficace de θ. Cherchons maintenant une fonction pivotale fonction de T_n. D'aprés 9), $Z = \sqrt{n}\,\dfrac{T_n - \theta}{\theta}$ suit approximativement une loi $N(0,1)$.

Posons $0.9 = P(-t < Z < t)$ oú le quantile $t = 1,645$ est lu dans la table de la loi normale.

D'où $\dfrac{t_n}{1 + (1,645/\sqrt{n})} \ < \ \theta \ < \ \dfrac{t_n}{1 - (1,645/\sqrt{n})}$.

11) Comme $n > 30$, on peut appliquer le résultat précédent.
D'où $313.5304 \ < \ \theta \ < 396.0706$.