Année 2007/2008 M. ABECASSIS, Mme CHEZE.
UNIVERSITÉ PARIS X NANTERRE

L2 SCIENCES ECONOMIQUES

CORRIGE CONTRÔLE CONTINU DE STATISTIQUES

Exercice 1

1. Une variable x vaut a avec la probabilité/fréquence 0,5 et b avec la probabilité 0,5 ($b \geq a$): alors

$$\begin{aligned} \overline{x} &= 0{,}5a + 0{,}5b \\ Var(x) &= 0{,}5(a-\overline{x})^2 + 0{,}5(b-\overline{x})^2 = (b-\overline{x})^2 \end{aligned}$$

d'où $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \frac{b-a}{2}$ (et non $\frac{a-b}{2} \leq 0$!)

2. La moyenne pour les 60 copies jaunes est 9

La moyenne pour les 40 copies bleues est 14

La moyenne globale m est la moyenne pondérée des moyennes, soit

$$m = 0{,}6 \times 9 + 0{,}4 \times 14 = 11$$

3. En application de 1 :

La variance des copies jaunes est $V(jaunes) = 2^2 = 4$

La variance des copies bleues est $V(bleues) = 5^2 = 25$

La variance intra-classe est la moyenne pondérée des variances, soit

$$V_{intra} = 0{,}6 \times 4 + 0{,}4 \times 25 = 12{,}4$$

4. La variance inter-classe est celle obtenue en faisant comme si toutes les copies de même couleur avaient la note moyenne de cette couleur : soit 60 copies avec la note 9 et 40 copies avec la note 14. D'où

$$V_{inter} = \frac{60}{100}(9-11)^2 + \frac{40}{100}(14-11)^2 = 6$$

$$\text{Variance totale } = V_{intra} + V_{inter} = 18{,}4$$

5. On peut aussi appliquer la formule de définition de la variance $V = \sum_{i=1}^{100}(x_i - \overline{x})^2$, ou plus simplement en regroupant en quatre classes selon les notes $V = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{4} n_j(x_j - \overline{x})^2$, où n_j est le nombre de copies de classe j ($j = 1$: $n_1 = 30$ =nombre de copies ayant la note $x_1 = 7$; $j = 2$: $n_2 = 20$ copies ayant $x_2 = 9$; $j = 3$: $n_3 = 30$ copies ayant $x_3 = 11$; $j = 4$: $n_4 = 20$ copies ayant $x_4 = 19$). Donc

$$V = \frac{30}{100}(7-11)^2 + \frac{20}{100}(9-11)^2 + \frac{30}{100}(11-11)^2 + \frac{20}{100}(19-11)^2 = 18{,}4$$

Alternativement, on peut utiliser la formule

$$V = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{4} n_j {x_j}^2 - (\overline{x})^2$$

$$V = \frac{1}{100}(30 \times 7^2 + 20 \times 9^2 + 30 \times 11^2 + 20 \times 19^2) - 11^2 = 18{,}4$$

Exercice 2

3. Partant de l'histogramme, la classe modale est la classe des 9-10.

4. Avec $F(10) = 0{,}4$ et $F(12) = 0{,}7$, la médiane vaut
$10{,}67 = 12 + ((12 - 10) * (0.5 - 0.4)/(0.7 - 0.4))$

5. $\bar{x} = 11.05$

6. Comme Mo < Mé < $\bar{x}$, on dit que la distribution est oblique à gauche.

Exercice 3

1. a) L'indice élémentaire est le rapport des valeurs de la grandeur étudiée de la période courante (2007) à la période de base (2000) :

$$\begin{aligned} I_{07/00}(RU) &= \frac{2{,}80}{2{,}40} = 1{,}1667 = 116{,}67\% \\ I_{07/00}(U) &= \frac{150}{100} = 1{,}50 = 150\% \end{aligned}$$

b) Pour répondre à la deuxième partie de la question, il convient de faire appel à la propriété de réversibilité :

$$\begin{aligned} I_{00/07}(RU) &= \frac{1}{I_{07/00}(RU)} = 0{,}8571 = 85{,}71\% \\ I_{00/07}(U) &= \frac{1}{I_{07/00}(U)} = 0{,}6667 = 66{,}67\% \end{aligned}$$

2. Les taux d'accroissement global des prix entre 2000 et 2007 sont :

$$\begin{aligned} \tau_{07/00}(RU) &= \frac{2{,}80 - 2{,}40}{2{,}40} = 0{,}17 = 17\% \\ \tau_{07/00}(U) &= \frac{150 - 100}{100} = 0{,}5 = 50\% \end{aligned}$$

3. Les taux d'accroissement annuel moyen des prix entre 2000 et 2007 sont :

$$\begin{aligned} \tau(RU) &= (1 + \tau_{07/00})^{1/7} - 1 = 0{,}023 = 2{,}3\% \\ \tau(U) &= (1 + \tau_{07/00})^{1/7} - 1 = 0{,}06 = 6\% \end{aligned}$$

4. Il faut calculer les quantités consommées en 2000 : RU : $20 \times 12 = 240$ repas ; U : 12 loyers mensuels.

Calculons ensuite la dépense en 2000 pour chaque poste : RU : $240 \times 2{,}40 = 576$; U : $100 = 1200$. Soit une dépense totale de 1776.

Les coefficients de pondération de 2000 sont donnés par :

$$\begin{aligned} \alpha_{00}(RU) &= 576/1776 = 0{,}32 \\ \alpha_{00}(U) &= 1200/1776 = 0{,}68 \end{aligned}$$

L'indice de Laspeyres est la moyenne arithmétique des indices élémentaires pondérés par les coefficients budgétaires afférents à la période de base (2000) :

$$L_{07/00}(p) = [(0{,}32 \times 1{,}1667) + (0{,}68x1{,}5)] = 1{,}3933 = 139.33\%$$

5. Il est possible d'appliquer la relation suivante : $P_{0/t} = \frac{1}{L_{t/0}}$ d'où

$$P_{00/07}(p) = \frac{1}{L_{07/00}(p)} = \frac{1}{1{,}3933} = 0{,}72 = 72\%$$

6. Calculons la dépense en 2007 pour chaque poste RU : $240 \times 2{,}80 = 672$; U : $150 \times 12 = 1800$. Soit une dépense totale de 2472.

Les coefficients de pondération de 2007 sont donnés par :

$$\begin{aligned} \alpha_{07}(RU) &= 672/2472 = 0{,}27 \\ \alpha_{07}(U) &= 1800/2472 = 0{,}73 \end{aligned}$$

L'indice de Paasche est donc

$$\frac{1}{P_{07/00}(p)} = \left(\frac{0{,}27}{1{,}1667} + \frac{0{,}73}{1{,}5}\right) = 0{,}7181 \qquad \Rightarrow P_{07/00}(p) = 1{,}3926 = 139{,}26\%$$

L'indice de Fisher est donc

$$F_{07/00}(p) = \sqrt{L_{07/00}(p) \times P_{07/00}(p)} = 1{,}3930 = 139{,}30\%$$

7. Calcul des quantités consommées avec les nouvelles hypothèses : RU : $30 \times 10 = 300$ repas ; U : 10 loyers mensuels.

Calcul de la dépense en 2000 pour chaque poste : RU : $300 \times 2{,}40 = 720$; U : $100 \times 10 = 1000$. Soit une dépense totale de 1720.

Les coefficients budgétaires de 2000 sont donnés par :

$$\begin{aligned} \alpha_{00}(RU) &= 720/1720 = 0{,}42 \\ \alpha_{00}(U) &= 3000/6000 = 0{,}58 \end{aligned}$$

L'indice de Laspeyres est

$$L_{07/00}(p) = [(0{,}42 \times 1{,}1667) + (0{,}58x1{,}5)] = 1{,}36 = 136\%$$