MASTER ISIFAR 2ème année — Bases mathématiques de l'assurance

Corrigé de l'examen du 18 novembre 2009

Exercice 1. On définit la transformée de Laplace d'une variable aléatoire X sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}] \; .$$

Pour chacune des lois suivantes, déterminer pour quelles valeurs de $t \geq 0$ la fonction génératrice est définie et la calculer lorsque c'est possible.

(i) Loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

Corrigé La fonction génératrice est définie pour tout $t \geq 0$ et vaut $\phi_X(t) = p\mathrm{e}^t + 1 - p$.

(ii) Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de densité $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, $\lambda > 0$.

Corrigé La fonction génératrice est définie pour $t \in [0, \lambda[$ et vaut $\phi_X(t) = \lambda/(\lambda - t)$.

(iii) Loi de Pareto $P(c, \alpha)$ de fonction de survie $(x/c)^{-\alpha}$, $x \geq c$, $c > 0$, $\alpha > 0$.

Corrigé La fonction génératrice n'est définie pour aucune valeur de $t > 0$.

Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre θ et soit $\{X_i\}$ une suite de variables i.i.d. On pose $S = \sum_{i=1}^N X_i$.

(iv) Calculer la fonction génératrice $L_N(z) = \mathbb{E}[z^N]$ pour $z > 0$.

Corrigé $L_N(z) = \mathrm{e}^{\theta(z-1)}$.

(v) Calculer la fonction génératrice $L_S(z) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tS}]$ pour $t > 0$ en fonction de celle des X_i et en déduire a loi de S lorsque les X_i suivent la loi de Bernoulli de paramètre p.

Corrigé

$$L_S(z) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tS}] = \mathbb{E}[\phi_X(t)^N] = \mathrm{e}^{\theta(\phi_X(t)-1)} = \mathrm{e}^{p\theta(\mathrm{e}^t-1)}$$

On obtient donc que S suit la loi de Poisson de paramètre $p\theta$.

Exercice 2. Les coûts de sinistres sont représentés par une suite de variables aléatoires positives i.i.d. de fonction de répartition F et d'espérance finie μ. Une compagnie d'assurance ne rembourse que les sinistres d'un montant supérieur à la franchise δ. Le coût des sinistres assurés est donc $X_\delta = (X_i - \delta)_+$.

(i) Exprimer le coût moyen d'un sinistre assuré $\mathbb{E}[X_\delta]$ en fonction de la fonction de survie $\bar{F}$ des X_i.

Corrigé Par intégration par parties, on obtient

$$\mathbb{E}[X_\delta] = \int_\delta^\infty (x - \delta)\,\mathrm{d}F(x) = \int_\delta^\infty \bar{F}(x)\,\mathrm{d}x \; .$$

(ii) Calculer le coût moyen d'un sinistre assuré $\mathbb{E}[X_\delta]$ lorsque les X_i suivent la loi exponentielle de paramètre λ.

Corrigé

$$\mathbb{E}[X_\delta] = \int_\delta^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda\delta}}{\lambda}\ .$$

(iii) Calculer le coût moyen d'un sinistre assuré $\mathbb{E}[X_\delta]$ lorsque les X_i suivent la loi de Pareto $P(\alpha, c)$ avec $\alpha > 1$ et $\delta > c$.

Corrigé

$$\mathbb{E}[X_\delta] = \int_\delta^\infty (x/c)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{c^\alpha \delta^{1-\alpha}}{\alpha - 1}\ .$$

(iv) On définit les variables aléatoires $Y_i = 1_{\{X_i > \delta\}}$. Quelle est la loi des variables Y_i ?

Corrigé Les variables Y_i sont i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $\bar{F}(\delta)$.

(v) Exprimer le nombre de sinistres assurés N_δ en fonction de N et des variables Y_i.

Corrigé $N_\delta = \sum_{i=1}^N Y_i$.

(vi) Calculer la fonction génératrice $G_\delta(z) = \mathbb{E}[z^{N_\delta}]$ en fonction de la fonction génératrice de N et de $\mathbb{P}(X > \delta)$. Déterminer la loi de N_δ lorsque N suit la loi de Poisson de paramètre θ.

Corrigé $\mathbb{E}[z^{N_\delta}] = \mathbb{E}[\{\bar{F}(\delta)z = F(\delta)\}^N] = \mathrm{e}^{\theta\bar{F}(\delta)(z-1)}$. La loi de N_δ est donc la loi de Poisson de paramètre $\theta\bar{F}(\delta)$.

Exercice 3. Soit N un processus de Poisson inhomogène d'intensité h. On pose $m(t) = \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s$ et on suppose que h prend les valeurs suivantes :

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1]\ , \\ 2 & \text{si } t \in [1,2]\ , \\ 1 & \text{si } t \in [2,3]\ . \end{cases}$$

(i) Quelle est la loi du nombre total d'arrivées dans l'intervalle $[0, 3]$.

Corrigé C'est la loi de Poisson de paramètre $\int_0^3 h(t)\,\mathrm{d}t = 4$.

(ii) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune arrivée avant la date $t = 2$.

Corrigé $N(2)$ suit la loi de Poisson de paramètre $\int_0^2 h(t)\,\mathrm{d}t = 3$, donc $\mathbb{P}(N(2) = 0) = \mathrm{e}^{-3}$.

(iii) Quelle est la probabilité qu'il y ait eu 2 arrivées avant la date $t = 2$ sachant qu'il y en a eu une à la date $t = 1$.

Corrigé La loi conditionnelle de $N(2) - N(1)$ sachant que $N(1) = 1$ est la loi de Poisson de paramètre 2 donc

$$\mathbb{P}(N(2) = 2 \mid N(1) = 1) = \mathbb{P}(N(2) - N(1) = 1 \mid N(1) = 1) = 2\,\mathrm{e}^{-2}\ .$$

(iv) Quelle est l'espérance du nombre d'arrivée entre la date $t = 2$ et la date $t = 3$ sachant qu'il y en a eu 10 à la date $t = 2$.

Corrigé Le processus de Poisson est un processus à accroissements stationnaires et indépendants, donc la loi du nombre d'arrivée entre $t = 2$ et $t = 3$ est la loi de Poisson de paramètre 1, donc $\mathbb{E}[N(3) - N(2) \mid N(2) = 10] = 1$.

Exercice 4. Soit Θ une variable aléatoire et N un processus de Poisson de paramètre θ conditionnellement à $\Theta = \theta$. On suppose que Θ prend les valeurs θ_1 avec probabilité p et θ_2 avec probablité $1 - p$, $p \in]0, 1[$. On pose $\theta = \mathbb{E}[\Theta]$. Soit $\{X_i\}$ une suite de variables aléatoires positives indépendantes de N et Θ, d'espérance finie μ et soit S le processus défini par

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \ .$$

(i) Calculer $\mathbb{E}[N(t) \mid \Theta = \theta_i]$, $i = 1, 2$. En déduire $\mathbb{E}[N(t)]$.

Corrigé $\mathbb{E}[N(t) \mid \Theta = \theta_i] = \theta_i t$, $i = 1, 2$, d'où $\mathbb{E}[N(t)] = p\theta_1 + (1 - p)\theta_2 = \theta$.

(ii) Calculer $\mathbb{E}[S(t) \mid \Theta = \theta_i]$, $i = 1, 2$. En déduire $\mathbb{E}[S(t)]$.

Corrigé $\mathbb{E}[S(t) \mid \Theta = \theta_i] = \theta_i \mu t$, $i = 1, 2$, d'où $\mathbb{E}[S(t)] = \theta\mu t$.

(iii) En déduire la condition de solvabilité à long terme pour une compagnie d'assurance faisant payer une prime c par unité de temps.

Corrigé La condition de solvabilité est $c > \theta\mu$.

Exercice 5. Soit N un processus de Poisson homogène d'intensité $\theta > 0$. Soit $T_1, \ldots, T_n, \ldots$ les instants d'arrivées. On rappelle la relation

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow T_n \leq t \ . \tag{1}$$

(i) Quelle est la loi des interarrivées $\tau_k = T_k - T_{k-1}$, $k \geq 1$? Quelle est la nature de la suite $\{\tau_k, k \geq 1\}$?

Corrigé Les variables τ_k sont i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\theta)$.

(ii) Déduire de la relation (1) l'identité

$$\mathbb{P}(T_n > t) = \mathrm{e}^{-\theta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\theta t)^k}{k!} \ . \tag{2}$$

Corrigé Par la relation (1), on a

$$\mathbb{P}(T_n > t) = \mathbb{P}(N(t) \leq n - 1) = \mathrm{e}^{-\theta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\theta t)^k}{k!} \ .$$

Soit $\{X_i\}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. positives d'espérance finie μ et de fonction de répartition F. Soit $u > 0$ (le capital initial), $c > 0$ la prime et R le processus défini par

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \ .$$

(iii) Rappeler la condition de solvabilité à long terme entre c, θ et μ.

Corrigé $c > \theta\mu$.

On suppose cette condition satisfaite et l'on pose $\rho = c/(\theta\mu) - 1$. On suppose que les X_i suivent la loi exponentielle de paramètre λ. On rappelle la formule de Lévy-Khinchine donnant la probabilité de ruine $\psi(u)$:

$$\psi(u) = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{k=1}^{\infty} (1+\rho)^{-k} \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n > u) \ . \tag{3}$$

(iv) Exprimer μ en fonction de λ.

Corrigé $\mu = 1/\lambda$.

(v) Utiliser l'identité (2) (en expliquant pourquoi on peut remplacer les variables τ_i par les variables X_i et λ par θ) pour donner une expression sous forme de somme pour $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n)$, que l'on reportera dans la formule de Pollacek-Khinchine pour déterminer explicitement la probabilité de ruine en fonction de θ et ρ.

Corrigé On peut appliquer la relation (2) à la somme des variables X_i car elles sont i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ en remplaçant θ par λ. On a donc

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{k=1}^{\infty} (1+\rho)^{-k} \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{e}^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^j}{j!} = \frac{\rho}{1+\rho} \, \mathrm{e}^{-\lambda u} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda u)^j}{j!} \sum_{k=j+1}^{\infty} (1+\rho)^{-k} \\ &= \frac{1}{1+\rho} \, \mathrm{e}^{-\lambda u} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda u)^j}{j!} (1+\rho)^{-j} = \frac{1}{1+\rho} \, \mathrm{e}^{-\lambda u} \mathrm{e}^{\frac{\lambda u}{1+\rho}} = \frac{1}{1+\rho} \, \mathrm{e}^{-\lambda \frac{\rho}{1+\rho} u} \ . \end{aligned}$$