Licence 1 Economie et Gestion — Année universitaire 2006-2007
Mathématiques 2

Eléments de correction de l'Epreuve de septembre de Mathématiques 2

Durée de l'épreuve : 2 h

L'utilisation de calculatrices et d'appareils électroniques est interdit. Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1. On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivante

$$f(x,y) \;=\; \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

(1) Déterminer son domaine de définition .

Le domaine de définition de f est :

$$((x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; x \neq 0 \text{ et } y \neq 0)$$

(2) Déterminer l'équation de la ligne de niveau de hauteur 2 et la représenter graphiquement.

Par définition la ligne de niveau de hauteur 2 de f est :

$$\{(x,y) \in D_f \mid \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\}$$

qui se réécrit

$$\{(x,y) \in D_f \mid x^2 + y^2 = 2yx\}$$
$$\{(x,y) \in D_f \mid (x-y)^2 = 0\}$$

La ligne de niveau de hauteur 2 de f est donc la droite $x = y$ privée de (0,0)

(3) Montrer que f est homogène et préciser son degré d'homogénéité .

Pour tout $\lambda > 0$, $f(\lambda x,\lambda y) \;=\; \frac{\lambda x}{\lambda y} + \frac{\lambda y}{\lambda x} \;=\; f(x,y)$ Donc f est homogène de degré 0.

(4) Calculer, pour $(x,y) \in D_f$, la quantité $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \;+\; y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Par le théorème d'Euler, comme f est homogène de degré 0:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \;+\; y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

Exercice 2. On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivante

$$f(x,y) \;=\; 4x^3 \;+\; y^2 \;-\; 4xy \;+\; 4x \;-\; 2y$$

(1) Montrer que le point (0,1) est un point stationnaire .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 12x^2 - 4y + 4 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y - 4x - 2 \\
\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) &= -4 + 4 = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) &= 2 - 2 = 0
\end{aligned}$$

Donc le point(0,1) est un point stationnaire

(2) Discuter la nature du point (0,1).

Les dérivées partielles d'ordre 2 de f en (0,1) de $\mathbb{R}^2$ sont:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 24x, \frac{\partial^2 f}{(}\partial y^2(x,y) = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}0,1) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = -4$$

On en déduit le développement limité :

$$f(x+h,y+k) - f(0,1) = k^2 - 4hk + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)$$

La signature de la forme quadratique ($k^2 - 4hk$) $=$ $(k-2h)^2 - 4h^2$ étant (1,1), le point stationnaire (0,1) est point col.

Exercice 3.

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ -y + z = b \\ x - y + 3z = c \end{cases}$$

où a,b,c sont des réels quelconques.

(1) Ecrire ce système sous forme matricielle $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

(2) Résoudre ce système par la méthode du pivot de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & a \\ & - & y & + & z & = & b \\ & - & 2y & + & 2z & = & c-a \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & a \\ & - & y & + & z & = & b \\ & & & & 0 & = & c-a-2b \end{array}\right.$$

dont on déduit que si $c-a-2b=0$ alors $(\mathcal{S})$ admet une infinité de solutions:

$$z=b+y, \quad y, \quad x=a-b-2y$$

si $c-a-2b\neq 0$ alors $(\mathcal{S})$ n'admet pas de solutions.

(3) Trouver la condition que doivent vérifier (a,b,c) pour que ce système admette une infinité de solutions.

$c-a-2b=0$

Soient $U=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $W=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$.

(4) En déduire que la famille (U,V,W) est une famille liée.

Comme le système $AX=(UVW)X=B$ admet une infinité de solutions ou pas de solutions alors nécessairement la famille (U,V,W) est une famille liée.

(5) Donner la dimension du sous-espace engendré par (U,V,W) .

Comme la famille (U,V,W) est une famille liée, la dimension de (U,V,W) est au plus 2, comme Uet V ne sont pas proportionnels, ils forment donc une famille libre de deux vecteurs, la dimension de (U,V,W) est donc 2.

(6) Donner l'équation du plan P engendré par (U,V).

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in P$ donc $X=\alpha U+\beta V$. D'où le système:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha & + & \beta & = & x \\ & - & \beta & = & y \\ \alpha & - & \beta & = & z \end{array}\right.$$

D'où $-x-2y+z=0$ Donc l'équation du plan P est donnée par

$$P=((x,y,z)\in R^3/-x-2y+z=0)$$

(7) Montrer que le vecteur $B=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ avec (a,b,c) satisfaisant à la question (3), appartient au plan P.

$\boxed{\text{Si } B \in P \text{ alors } -a-2b+c=0\text{, on retrouve la condition (3)}}$

(8) Montrer que le vecteur $Z = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan P. En déduire la projection orthogonale T de Z sur le plan P.

On peut écrire l'équation du plan P sous forme de produit scalaire $-x-2y+z = < \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} >= 0$ donc tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P$ est orthogonal au vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme Z est orthogonal au plan , sa projection orthogonale sur P est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$