Développements limités. Points stationnaires

Exercice 1.
1/ Nous avons d'une part :

$$\sqrt{1+\frac{x}{2}} = 1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{32} + x^2\varepsilon_1(x) \tag{1}$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.
D'autre part, en utilisant les DL de $x \mapsto \sin(x)$ et de $x \mapsto e^x$, nous écrivons :

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}\sin(x)} &= e^{\frac{1}{2}x + x^2\varepsilon_2(x)}; \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0 \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + x^2\varepsilon_2(x) + \frac{\frac{1}{4}x^2}{2} + x^2\varepsilon_3(x); \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0 \qquad (2) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon_4(x) \qquad (3) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_4(x) = \varepsilon_2(x) + \varepsilon_3(x)$.
Remarquer que dans l'égalité (2)*, nous avons "exclu" les puissances* > 2.
Maintenant, en effectuant le produit des égalités (1) et (3), nous obtenons (*en excluant les puissances* > 2) :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon_4(x) + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{32}x^2 + x^2\varepsilon_1(x) \\ &= 1 + \frac{3}{4}x + \frac{7}{32}x^2 + x^2\varepsilon_5(x) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_5(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_4(x)$.

2/ Nous avons :

$$\sin(x) = x + x^2\varepsilon_1(x); \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$$

Donc :

$$\begin{aligned} \ln(1+\sin(x)) &= \ln(1 + x + x^2\varepsilon_1(x)) \\ &= 1 + x + x^2\varepsilon_1(x) - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x); \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0 \\ &= 1 + x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_3(x); \quad \varepsilon_3(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) \qquad (4) \end{aligned}$$

En plus :

$$e^{\frac{x}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon_4(x); \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_4(x) = 0 \tag{5}$$

Ainsi, en multipliant les égalités (4) et (5), nous obtenons :

$$\begin{aligned} g(x) &= (1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+x^2\varepsilon_4(x))(1+x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_3(x)) \\ &= 1+x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_3(x)+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{8}+x^2\varepsilon_4(x) \\ &= 1+\frac{3}{2}x+\frac{1}{8}x^2+x^2\varepsilon_5(x) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_5(x)=\varepsilon_3(x)+\varepsilon_4(x)$.

3/ Les DL des fonctions $x \mapsto (1+x)^4$ et $x \mapsto \cos(x)$ s'écrivent :

$$(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+x^2\varepsilon_1(x)$$

$$\cos(x) = 1-\tfrac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_2(x)$$

où $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_i(x)=0$.
Donc :

$$\begin{aligned} h(x) &= (1+4x+6x^2+x^2\varepsilon_1(x))(1-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_2(x)) \\ &= 1-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_2(x)+4x+6x^2+x^2\varepsilon_1(x) \\ &= 1+4x+\frac{11}{2}x^2+x^2\varepsilon_3(x) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_3(x)=\varepsilon_1(x)+\varepsilon_2(x)$.

Exercice 3.
1/ Le domaine de définition de f est donné par :

$$\begin{aligned} D_f &= \{x\in\mathbb{R};\ \frac{x}{4}+1>0\} \\ &=]-4;+\infty[\end{aligned}$$

2/ D'abord, nous avons :

$$\begin{aligned} \ln(\frac{x}{4}+1) &= \frac{x}{4}-\frac{\frac{x^2}{16}}{2}+x^2\varepsilon_1(x);\quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0 \\ &= \frac{x}{4}-\frac{x^2}{32}+x^2\varepsilon_1(x) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}(\frac{x}{2}-1)(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{32}+x^2\varepsilon_1(x)) &= \frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{32}-x^2\varepsilon_1(x)\\ &= -\frac{x}{4}+\frac{5}{32}x^2+x^2\varepsilon_2(x)\end{aligned}$$

avec $\varepsilon_2(x) = -\varepsilon_1(x)$ (*facultatif- nous povons prendre directement* $+x^2\varepsilon_1(x)$). En utilisant le DL de la fonction exponentielle, nous écrivons :

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{-\frac{x}{4}+\frac{5}{32}x^2+x^2\varepsilon_2(x)}\\ &= 1-\frac{x}{4}+\frac{5}{32}x^2+x^2\varepsilon_2(x)+\frac{(\frac{-x}{4})^2}{2}+x^2\varepsilon_3(x);\quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x)=0\\ &= 1-\frac{1}{4}x+\frac{6}{32}x^2++x^2\varepsilon_4(x)\end{aligned}$$

avec $\varepsilon_4(x) = \varepsilon_2(x) + \varepsilon_3(x)$.

3/ Pour déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0, **il suffit** d'extraire du DL précédent la partie du degré inférieur ou égal à 1. L'équation de la tangente est donc :

$$y = 1 - \tfrac{1}{4}x$$

4/ Pour déterminer la position du graphe de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0, **il faut** étudier le signe de $(f(x) - y)$. Pour cela, il suffit de regarder le signe du coefficient du terme d'ordre 2 dans le DL précédent, qui est positif (égal à $\frac{6}{32}$). Donc le graphe de f est au dessus de la tangente.

Remarque : $f(x) = (\frac{x}{4}+1)^{\frac{x}{2}-1}$.