Université Paris Paris Ouest Nanterre La Défense — Année 2009/2010

Licence de gestion apprentissage — **Statistiques**

Corrigé de l'examen du 29 janvier 2010

Exercice 1

1- $E(\bar{X}_n) = m = 30$ et $V(\bar{X}_n) = \dfrac{\sigma^2}{n} = \dfrac{36}{n}$.

2- Si $n \leq 30$, la loi de $\bar{X}_n$ est inconnue. Si $n > 30$, on peut appliquer le théorème central limite à l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$: ainsi $Z = \dfrac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}} = \sqrt{n}\,\dfrac{\bar{X}_n - 30}{\sqrt{36}}$ suit approximativement une loi $N(0,1)$.

3 - Comme $n > 30$, $P(\bar{X}_n < 28) = P(Z < -2,33) \simeq 0,01$.

4 - Pour construire l'intervalle à risques symétriques de $\bar{X}_n$, on utilise la variable aléatoire $Z = \sqrt{100}\,\dfrac{\bar{X}_n - 30}{\sqrt{36}}$ qui suit approximativement une loi $N(0,1)$ par le théorème central limite.

Posons $0.9 = P(a < \bar{X}_n < b) = P(-t < Z < t)$ où le quantile $t = 1,645$ est lu dans la table de la loi normale.

D'où $29,013 < \bar{X}_n < 30,987$.

Exercice 2

1) $\bar{x}_n = \dfrac{6014}{15} = 400,93$ et $\hat{s}^2 = \dfrac{15}{14}\left(\dfrac{2563408}{15} - (400,93)^2\right) = 10871,067$

2) Pour construire l'intervalle de confiance pour m, on utilise un bon estimateur de m: $\bar{X}_n$ estimateur convergent de m. Soit $Z = \sqrt{n}\,\dfrac{\bar{X}_n - m}{\hat{s}}$ suit une loi de student $T(14)$.

Posons $0.95 = P(a < \bar{X}_n < b) = P(-t < Z < t)$ où le quantile $t = 2,145$ est lu dans la table de la student(14).

D'où $343,19 < m < 458,68$.

Exercice 3

A.
1- α = risque de supposer que l'objectif qualité n'est pas atteint alors qu'il l'est, ce qui oblige à refaire la production pour rien.
β = risque de supposer que l'objectif qualité est atteint alors qu'il ne l'est pas, ce qui entraine la livraison alors que la livraison est défectueuse.
2- Quelle variable utilise-t'on pour construire ce test ? $\bar{X}_n$ avec $X = 1$ si l'article tiré est conforme avec la probabilité p et 0 sinon avec la probabilité $1 - p$.

Comme $n > 30$, $np_0 = 100 * 0.05 \geq 5$ et $n(1-p_0) \geq 5$ on peut appliquer le théorème central limite à l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de loi de bernoulli(p) :

ainsi $Z = \dfrac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}} = \sqrt{100}\,\dfrac{\bar{X}_n - 0.05}{\sqrt{0.05 * 0.95}}$ suit approximativement une loi $N(0,1)$.

3- $W = (\bar{X}_n > K)$ et $\alpha = 0.1 = P_{H_0}(W) = P_{H_0}(Z > \sqrt{100}\,\dfrac{K - 0.05}{\sqrt{0.05 * 0.95}})$.

D'où $K = 0.05 + 1.285 * \dfrac{\sqrt{0.05 * 0.95}}{10} = 0.078$. On rejette H_0 c'est à dire qu'on considère la livraison non conforme au risque 10% si $\bar{X}_n > 0.078$.
$\bar{x}_n = \dfrac{7}{100} < 0.078$, on ne rejette donc pas H_0 et la livraison peut être considérée conforme au risque 10%.

4- $\beta = P_{H_1}(\bar{W}) = P_{H_0}(Z \leq \sqrt{100}\,\dfrac{0.078 - 0.1}{\sqrt{0.1 * 0.9}}) = 0.2177$. La puissance du test est $\eta = P_{H_1}(W) = 0.7823$ = probabilité pour le fournisseur de considérer la commande non conforme à bon escient.

B. 1- $W = (\bar{X}_n < K)$ et $\alpha = 0.1 = P_{H_0}(W) = P_{H_0}(Z < \sqrt{100}\,\dfrac{K - 0.1}{\sqrt{0.1 * 0.9}})$.

D'où $K = 0.1 - 1.285 * \dfrac{\sqrt{0.1 * 0.9}}{10} = 0.0615$. On rejette H_0 c'est à dire qu'on considère la livraison conforme au risque 10% si $\bar{X}_n < 0.0615$.

2- $\bar{x}_n = \dfrac{7}{100} > 0.0615$, on ne rejette donc pas H_0 et la livraison ne peut être considérée conforme au risque 10%.

α = risque de supposer que l'objectif qualité est atteint alors qu'il ne l'est pas.
β = risque de supposer que l'objectif qualité n'est pas atteint alors qu'il l'est.

C. Comparer les conclusions du fournisseur et de l'entreprise E sur un même échantillon: elles sont contradictoires. Y a-t-il des situations de litige ? oui pour toutes les valeurs

$0.0615 \leq \bar{x}_n \leq 0.078$

Exercice 4

Test d'ajustement
On veut tester au niveau 5%:

$$H_0 : P = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \qquad \textit{contre}$$
$$H_1 : P \neq (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

On construit le tableau des effectifs théoriques sous H_0:

Couleur	A	B	C
Effectif	$38 = \frac{114}{3}$	38	38

Sous H_0, comme $n = 114 \geq 30$ et que les effectifs théoriques sont supérieurs à 5,
$T_n = \sum_{i=1}^{3} \frac{(N_i - 38)^2}{38}$suit approximativement une loi $\chi^2(2)$.
La région de rejet, au niveau 5% est de la forme

$$W = (T_n \geq 5.99)$$

On calcule la valeur de T_n sur l'échantillon et on obtient $t_n < 5.99$ qui n'est pas dans la région de rejet, on rejette au niveau 5% l'hypothèse qu'il y a un effet de l'exposition répetée.