Corrigé de l'examen de janvier 2005

Exercice 1

$\mathcal{P}_1$={familles ayant donné naissance à un prématuré présentant un risque périnatal élevé},
$\mathcal{P}_2$={ familles ayant donné naissance à un prématuré présentant un risque périnatal très faible},
X= score de réactions post-traumatiques chez la mère, variable quantitative
X_1= score de réactions post-traumatiques chez la mère dans $\mathcal{P}_1$ de moyenne μ_1 et d'écart-type σ_1 inconnus dans $\mathcal{P}_1$
X_2= score de réactions post-traumatiques chez la mère dans $\mathcal{P}_2$ de moyenne μ_2 et d'écart-type σ_2 inconnus dans $\mathcal{P}_2$
On observe :

un échantillon de X_1 issu de $\mathcal{P}_1$ de taille $n_1=14$ pour lequel

le score moyen μ_1 est estimé par $\overline{x}_1 = 30{,}24$ et l'écart-type du score σ_1 est estimé par $s_1=12{,}11$ (estimation biaisée)

un échantillon de X_2 issu de $\mathcal{P}_2$ de taille $n_2=12$ pour lequel

le score moyen μ_2 est estimé par $\overline{x}_2 = 12{,}31$ et l'écart-type du score σ_2 est estimé par $s_2=9{,}42$ (estimation biaisée)

L'hypothèse que les mères de prématurés à risque périnatal élevé présentent des réactions post-traumatiques plus fortes que celles de prématurés à risque très faible se traduit par le fait que le score moyen des premières μ_1 est supérieur à celui des secondes μ_2 : $\mu_1 > \mu_2$. Tester l'hypothèse émise revient donc à comparer les deux moyennes μ_1 et μ_2 à partir de deux échantillons indépendants en utilisant le test unilatéral de l'hypothèse nulle H_0 : $\mu_1 = \mu_2$ contre l'hypothèse alternative H_1 : $\mu_1 > \mu_2$ au risque α=5%.

Test de comparaison de deux moyennes μ_1 et μ_2 à partir de deux échantillons indépendants :
test de l'hypothèse nulle H_0 : $\mu_1 = \mu_2$ contre l'hypothèse alternative H_1 : $\mu_1 > \mu_2$ au risque unilatéral α=5%.

Les variables X_1 et X_2 étant normales dans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ et de variances inconnues égales ($n_1=14 < 30$ et $n_2=12 < 30$) ce test est basé sur la statistique de test de Student :

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S^* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$ qui suit une loi de Student $T_{n_1+n_2-2}=T_{24}$ sous H_0.

Sous l'hypothèse alternative unilatérale H_1 : $\mu_1 > \mu_2$ les valeurs de $\overline{X}_1$ ont tendance à être supérieures à celles de $\overline{X}_2$ donc les valeurs de T ont tendance à être positives, c'est-à-dire que la région de rejet du test est à droite du domaine de variation de T.
La région de rejet du test unilatéral au risque α=5% : $RC_{5\%}=]t_{0,95} ; +\infty[=]1{,}711 ; +\infty[$
où $t_{0,95}=1{,}711$ est le quantile d'ordre $1-\alpha=0{,}95$ de la loi T_{24} ($\nu=24$ et $P=0{,}10$).

L'écart-type observé biaisé de X_1 dans $\mathcal{P}_1$: $s_1=12{,}11$ et l'écart-type observé biaisé de X_2 dans $\mathcal{P}_2$: $s_2=9{,}42$

La variance commune σ^2 de X_1 dans $\mathcal{P}_1$ et de X_2 dans $\mathcal{P}_2$ est estimée par la variance observée sans biais :

$$s^{*2} = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{14 \times 12{,}11^2 + 12 \times 9{,}42^2}{14+12-2} = 129{,}915 \text{ d'où } s^* = 11{,}398 \approx 11{,}4$$

La valeur observée de la statistique de test T : $$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s^* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{30{,}24 - 12{,}31}{11{,}398\sqrt{\frac{1}{14} + \frac{1}{12}}} = \frac{17{,}93}{4{,}48} = 3{,}999$$

(calcul approché $s^*=11{,}4$ $t=3{,}998$)

<u>règle de décision</u>
- on rejette H_0 en faveur de H_1 au risque α=5% si la valeur observée de T, t appartient à $RC_{5\%}=]1{,}711 ; +\infty[$ la région de rejet du test unilatéral au risque α=5% et
- on conserve H_0 (on rejette H_1) au seuil α=5% sinon, c'est-à-dire si t n'appartient pas à $RC_{5\%}$.

<u>décision</u>
La valeur observée t appartient à la région de rejet de H_0 : on rejette donc H_0 en faveur de H_1 au risque α=5%.

➨ Le score moyen des mères de prématurés à risque périnatal élevé est supérieur à celui des mères de prématurés à risque très faible au risque α=5% , ce qui confirme l'hypothèse de réactions post-traumatiques plus fortes chez les mères de prématurés à risque périnatal élevé, au risque α=5%.

Exercice 2

$\mathcal{P}$ ={joueurs adeptes du jeu de rôle en ligne Everquest}
X= âge, définie sur E={adolescent, adulte} variable qualitative à 2 modalités,
Y= durée hebdomadaire de jeu, définie sur F={moins de 15h, entre 15h et 30h, plus de 30h} variable qualitative à 3 modalités.

1. Test du khi-deux d'indépendance : $\begin{cases} H_0 : \text{ X et Y indépendantes} \\ H_1 : \text{ X et Y liées} \end{cases}$ bilatéral au risque α=1%.

Sur deux échantillons appariés de X et de Y issus de $\mathcal{P}$ de taille n=518, les effectifs observés n_{ij} et les effectifs théoriques sous H_0 (attendus sous H_0) e_{ij} sont notés entre parenthèses dans le tableau suivant, puisque e_{11}=142×82/518= 22,48 et e_{22}=254×436/518= 213,79 d'où e_{12}=142−22,48= 119,52 e_{21}=254−213,79= 40,21 e_{31}=82−(22,48+40,21)= 19,31 et e_{32}=436− (119,52+213,79)= 102,69 (les e_{ij} sont notés entre parenthèses) :

X durée de jeu	Y âge adolescent		adulte		total
moins de 15 heures	23	(22,5)	119	(119,5)	*142*
entre 15 et 30 heures	38	(40,2)	216	(213,8)	*254*
plus de 30 heures	21	(19,3)	101	(102,7)	*122*
total	*82*		*436*		**n=518**

Sous H_0, la statistique de test $Q^2 = \sum \frac{(N_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$ suit approximativement une loi du khi-deux à 2 ddl car n=518 ≥ 30 et tous les e_{ij} sont supérieurs à 5.

La valeur observée de Q^2 vaut :

$$q^2 = \frac{(23\text{-}22{,}5)^2}{22{,}5} + \frac{(119\text{-}119{,}5)^2}{119{,}5} + \frac{(38\text{-}40{,}2)^2}{40{,}2} + \frac{(216\text{-}213{,}8)^2}{213{,}8} + \frac{(21\text{-}19{,}3)^2}{19{,}3} + \frac{(101\text{-}102{,}7)^2}{102{,}7}$$
$$= \frac{0{,}5^2}{22{,}5} + \frac{(-0{,}5)^2}{119{,}5} + \frac{(-2{,}2)^2}{40{,}2} + \frac{2{,}2^2}{213{,}8} + \frac{1{,}7^2}{19{,}3} + \frac{(-1{,}7)^2}{102{,}7} = 0{,}334$$

<u>règle de décision</u>
- on rejette H_0 en faveur de H_1 au risque α=5% si la valeur observée de Q^2, q^2 appartient à $RC_{1\%}$ la région de rejet du test au risque α=1% : $RC_{1\%}$=] $q^2_{0,99}$; +∞[=]9,210 ; +∞[car $q^2_{0,99}$ =9,210 est le quantile d'ordre 0,99 de la loi χ^2_2 (ν=2 et P=0,01), et
- on conserve H_0 (on rejette H_1) au seuil α=1% sinon, c'est-à-dire si q^2 n'appartient pas à $RC_{1\%}$.

<u>décision</u>
q^2=0,334 n'appartient pas à $RC_{1\%}$ donc on ne rejette pas H_0 (conserve H_0 ou on rejette H_1) au seuil α=1%.

➨ On ne peut pas accepter l'hypothèse d'un lien entre la durée hebdomadaire de jeu et l'âge des joueurs, au seuil α=1% et au risque d'erreur de 2^d^ espèce β inconnu.

2. $\mathcal{P}$ ={***adolescents*** joueurs adeptes du jeu de rôle en ligne Everquest}
X= durée hebdomadaire de jeu définie sur E={moins de 30h, plus de 30h} variable qualitative à 2 modalités ou
X= jouer plus de 30 heures par semaine, définie sur E={oui, non} variable qualitative à 2 modalités avec
p= proportion d'adolescents jouant plus de 30 heures par semaine, inconnue dans $\mathcal{P}$ (q=1−p= proportion d'adolescents jouant moins de 30 heures par semaine, inconnue dans $\mathcal{P}$).

On dispose d'un échantillon de X issu de la population $\mathcal{P}$, de taille n=23+38+21=82 sur lequel on estime p par $f = \frac{21}{82} = 0{,}256$.

L'hypothèse que plus de 25% des adolescents jouent plus de 30 heures par semaine correspond au fait que dans la population des adolescents, la proportion de ceux qui jouent plus de 30 heures par semaine p est supérieure à p_0=25%.
C'est un test de comparaison d'une proportion à la proportion théorique p_0=25%=0,25 :
$H_0 : p = p_0= 0{,}25$
contre $H_1 : p > p_0= 0{,}25$ alternative unilatérale droite, au risque α=5%.
Sous H_0, puisque n=82 ≥ 30, np_0=82×0,25=20,5 ≥ 5 donc $n(1-p_0)$ =82×0,75(=61,5) ≥ 5, ce test est basé sur la statistique de test :

① $Z = \dfrac{(F_n - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} = \dfrac{(F_n - 0{,}25)\sqrt{82}}{\sqrt{0{,}25(1-0{,}25)}}$ qui suit approximativement une loi $\mathcal{N}(0,1)$ sous H_0

Sous l'hypothèse alternative unilatérale H_1 : $p > p_0=0{,}25$ les valeurs de F_n ont tendance à être supérieures à $p_0=0{,}25$ donc les valeurs de Z ont tendance à être positives, c'est-à-dire que la région de rejet du test est à droite du domaine de variation de Z.

La région de rejet du test unilatéral droit au risque $\alpha=5\%$: $RC_{5\%}=]z_{1-\alpha} ; +\infty[=]z_{0,95} ; +\infty[=]1{,}645; +\infty[$ car la valeur critique $z_{1-\alpha}=z_{0,95}=1{,}645$ est le quantile d'ordre $1-\alpha=0{,}95$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

<u>règle de décision</u>

- on rejette H_0 en faveur de H_1 au risque $\alpha=5\%$ si la valeur observée de Z, z appartient à la région de rejet du test unilatéral droit au risque $\alpha=5\%$: $RC_{5\%}=]z_{1-\alpha} ; +\infty[=]z_{0,95} ; +\infty[=]1{,}645; +\infty[$ et
- on conserve H_0 (on rejette H_1) au seuil $\alpha=5\%$ sinon, c'est-à-dire si z n'appartient pas à $RC_{5\%}$.

<u>décision</u>

La valeur observée de la statistique de test Z : $z = \dfrac{(f - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} = \dfrac{(0{,}256 - 0{,}25)\sqrt{82}}{\sqrt{0{,}25 \times 0{,}75}} = \dfrac{0{,}0552}{0{,}433} = 0{,}1275$

(calcul approché f=0,256 z=0,125)

Puisque z n'appartient pas à la région de rejet de H_0 on conserve donc H_0 (on rejette H_1) au seuil $\alpha=5\%$.

② F_n qui suit approximativement une loi normale $\mathcal{N}\left(p_0, \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}\right)$ sous H_0

Sous l'hypothèse alternative unilatérale H_1 : $p > p_0=0{,}25$ les valeurs de F_n ont tendance à être supérieures à $p_0=0{,}25$, c'est-à-dire que la région de rejet du test est à droite de $p_0=0{,}25$.

La région de rejet du test unilatéral droit au risque $\alpha=5\%$: $RC_\alpha = \left]p_0 + z_{1-\alpha}\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}} ; +\infty\right[$ d'où

$RC_{5\%} =]0{,}25 + z_{0,95}\times 0{,}0478 ; +\infty[=]0{,}25 + 1{,}645\times 0{,}0478 ; +\infty[=]0{,}25 + 0{,}07866 ; +\infty[=]0{,}329 ; +\infty[$

où $z_{1-\alpha} = z_{0,95}=1{,}645$ est le quantile d'ordre $1-\alpha=0{,}95$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

<u>règle de décision</u>

- on rejette H_0 (on accepte H_1 ou on valide H_1) au risque $\alpha=5\%$ si la valeur observée de F_n, f appartient à la région de rejet du test unilatéral droit au risque $\alpha=5\%$: $RC_{5\%} =]0{,}329 ; +\infty[$ et
- on conserve H_0 (on rejette H_1) au seuil $\alpha=5\%$ sinon, c'est-à-dire si z n'appartient pas à $RC_{5\%}$.

<u>décision</u>

La valeur observée de la statistique de test F_n : $f = 0{,}256$

Puisque f n'appartient pas à la région de rejet de H_0 on conserve donc H_0 (on rejette H_1) au seuil $\alpha=5\%$.

➨ On ne peut pas accepter l'hypothèse que plus de 25% des adolescents jouent plus de 30 heures par semaine, au seuil $\alpha=5\%$ et au risque de seconde espèce β inconnu.

Le risque minimum pour accepter H_1 (ou pour rejeter H_0) est le degré de signification α_{obs} :

c'est la probabilité d'obtenir sous H_0 une valeur de Z au moins aussi élevée que celle observée z, c'est à dire que $\alpha_{obs} = P(Z \geq z) = P(Z \geq 0{,}1275) = 1 - F_Z(0{,}1275) \approx 1 - F_Z(0{,}13) = 1 - 0{,}5517 = 0{,}4483$.

On accepterait H_1 (rejetterait H_0) pour un risque maximum $\alpha \geq \alpha_{obs} \approx 45\%$ risque minimum.

($\alpha_{obs} = P_{H_0}(F_n \geq f) = P_{H_0}(F_n \geq 0{,}256) = P(Z \geq z) = P(Z \geq 0{,}1275) \approx 1-F_Z(0{,}13)=0{,}4483$).

Exercice 3

$\mathcal{P}$={rats soumis au renforcement (avec récompense : boulette de viande)}
X= temps mis pour atteindre une case d'arrivée à partir d'une case de départ, variable quantitative de moyenne μ et d'écart-type σ, inconnus dans $\mathcal{P}$.
On dispose d'un échantillon de X issu de la population $\mathcal{P}$ de taille n=39 sur lequel
on estime μ par $\bar{x}$=23 sec et σ par s=4,2 sec (estimation biaisée).
L'hypothèse que le renforcement favorise l'apprentissage correspond au fait que avec renforcement, le temps moyen des rats est inférieur au temps moyen sans renforcement, c'est–à-dire que la moyenne μ dans la population $\mathcal{P}$ est inférieure à celle trouvée dans les études antérieures sans renforcement μ_0=25 sec.

C'est un test de comparaison d'une moyenne à la valeur théorique μ_0= 25
test unilatéral gauche de l'hypothèse nulle $H_0 : \mu=\mu_0=25$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \mu<\mu_0=25$ au risque α=1%.
Puisque X est une variable quelconque, σ est inconnu et n=39 ≥ 30, ce test est basé sur la statistique de test :

❶ $Z = \dfrac{(\overline{X}_n - \mu_0)\sqrt{n}}{S_n^*}$ qui suit approximativement une loi $\mathcal{N}(0,1)$ sous H_0

Sous l'hypothèse alternative unilatérale $H_1 : \mu<\mu_0=25$ les valeurs de $\overline{X}_n$ ont tendance à être inférieures à μ_0=25 donc les valeurs de Z ont tendance à être négatives, c-à-d que la région de rejet du test est à gauche du domaine de variation de Z.
La région de rejet du test unilatéral gauche au risque α=1% est $RC_{1\%} =]-\infty\,; -2{,}325[$ où la valeur critique $z_{0,01} = -z_{1-\alpha} = -z_{0,99} = -2{,}325$ est le quantile d'ordre α=0,01 (ou $z_{1-\alpha} = z_{0,99} = 2{,}325$ quantile d'ordre $1-\alpha$=0,99) de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
La valeur observée de la statistique de test Z : $z = \dfrac{(\bar{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{s^*} = \dfrac{(23-25)\sqrt{39}}{4{,}255} = -2{,}935$ car $s^* = \sqrt{\dfrac{39}{38}}\,4{,}2 = 4{,}255$.

<u>règle de décision</u>
- on rejette H_0 en faveur de H_1 au risque α=1% si la valeur observée de Z, z appartient à $RC_{1\%} =]-\infty\,; -2{,}325[$
- on conserve H_0 (on rejette H_1) au seuil α=1% sinon, c'est-à-dire si z n'appartient pas à $RC_{1\%}$.

<u>décision</u>
La valeur observée z appartient à la région de rejet de H_0 : on rejette donc H_0 en faveur de H_1 au risque α=1%.

❷ $\overline{X}_n$ qui suit approximativement sous H_0 une loi normale de moyenne μ_0=25 et d'écart-type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \dfrac{s^*}{\sqrt{n}}$.

Sous l'hypothèse alternative unilatérale $H_1 : \mu<\mu_0=25$ les valeurs de $\overline{X}_n$ ont tendance à être inférieures à μ_0=25, c'est-à-dire que la région de rejet du test est à gauche de μ_0=25.
La région de rejet du test unilatéral gauche au risque α=1% est l'ensemble des valeurs de $\overline{X}_n$ inférieures à la valeur $\mu_0 - z_{1-\alpha}\dfrac{s^*}{\sqrt{n}}$ où $-z_{1-\alpha} = -z_{0,99} = -2{,}325$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$=0,99 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$:

$RC_\alpha = \left]-\infty; \mu_0 - z_{1-\alpha}\dfrac{s^*}{\sqrt{n}}\right[$ d'où $RC_{1\%} = \left]-\infty; 25 - 2{,}325\dfrac{4{,}255}{\sqrt{39}}\right[=]-\infty\,; 25-2{,}325\times0{,}681[=]-\infty\,; 25-1{,}58[$

$RC_{1\%} =]-\infty\,; 23{,}42[$

<u>règle de décision</u>
- on rejette H_0 en faveur de H_1 au risque α=1% si la valeur observée de $\overline{X}_n$, $\bar{x}$ appartient à $RC_{1\%} =]-\infty\,; 23{,}42[$ et
- on conserve H_0 (on rejette H_1) au seuil α=1% sinon, c'est-à-dire si $\bar{x}$ n'appartient pas à $RC_{1\%}$.

<u>décision</u>
La valeur observée de la statistique de test $\overline{X}_n$ est $\bar{x}$=23 et appartient à la région de rejet de H_0 : on rejette donc H_0 en faveur de H_1 au risque α=1%.

➨ Le temps moyen des rats avec renforcement est inférieur à celui des rats sans renforcement au risque α=1% ce qui confirme l'hypothèse que le renforcement favorise l'apprentissage, au risque α=1%.

Le niveau de signification ou degré de signification α_{obs} du test unilatéral gauche est la probabilité d'obtenir sous H_0 une valeur de la statistique de test au moins aussi faible que celle observée, c'est à dire que :

❶ si Z est la statistique de test

$$\alpha_{obs} = P(Z \le z) = P(Z \le -2{,}935) = 1 - P(Z \ge 2{,}935) = 1 - F_Z(2{,}935) \approx 1 - F_Z(2{,}94) = 1 - 0{,}9984 = 0{,}0016$$

❷ si $\overline{X}_n$ est la statistique de test

$$\alpha_{obs} = P_{H_0}(\overline{X}_n \le \bar{x}) = P\left(Z \le \frac{(\bar{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{s^*}\right) = P\left(Z \le \frac{(23-25)\sqrt{39}}{4{,}255}\right) = P(Z \le -2{,}935) = 1 - F_Z(2{,}935) \approx 0{,}0016$$

➨ Le niveau (ou degré) de signification α_{obs} du test $\alpha_{obs} \approx 0{,}16\%$: on peut rejeter l'hypothèse nulle tant que le risque maximum α est supérieur à $\alpha_{obs} \approx 0{,}16\%$ (α_{obs} est le risque minimum pour rejeter H_0).