Université Paris X — Licence Économie et Gestion
Mathématiques 1 — A. Hassani

Epreuve Septembre 2007

Exercice 1.
1/ Montrons par récurrence que :

$$\forall n \geq 1, \quad n! \geq 2^{n-1}.$$

$\star$ Vérifions la propriété pour $n = 1$.
On a $1! = 1 = 2^{1-1}$.
Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
$\star$ Soit $n \geq 1$. Montrons que si la propriété est vraie pour n alors elle est vraie pour $n + 1$.
Hypothèse : $n! \geq 2^{n-1}$
Soit $n \geq 1$. Alors on a :
D'une part :

$$n \geq 1 \Rightarrow n + 1 \geq 2 \tag{1}$$

Et d'autre part en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} (n+1)! &= n!(n+1) \\ &\geq 2^{n-1}(n+1) \end{aligned}$$

Donc d'après (1), on obtient :

$$(n + 1)! \geq 2^{(n+1)-1}.$$

Ce qui montre que la propriété est vraie pour $n + 1$.
$\star$ Conclusion : $\forall n \geq 1, \quad n! \geq 2^{n-1}$.

2/ Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $U_n = \frac{2^n}{n!}$.
D'après la question précédente, on a :

$$\frac{2^n}{2} \leq n!$$

Donc :

$$\frac{2^n}{n!} \leq 2$$

Ce qui montre que la suite (U_n) est majorée par 2.

3/ Etudions la monotonie de $(U_n)_{n\geq 1}$.
On a :

$$\tfrac{U_{n+1}}{U_n} = \tfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \tfrac{n!}{2^n} = \tfrac{2}{n+1} \leq 1.$$

On en déduit que (U_n) est décroissante.

Exercice 2. Soient f et g définies par :

$$f(x) = x\ln(x^2+1) \text{ et } g(x) = 2e^{\frac{1}{x}}.$$

1/ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(x^2+1) + x.\frac{2x}{x^2+1} \\ &= \ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}. \end{aligned}$$

2/ g est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et $\forall x \in \mathbb{R}^\star$, on a :

$$g'(x) = -\tfrac{2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}.$$

3/ fg est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et $\forall x \in \mathbb{R}^\star$, on a :

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Exercice 3. Déterminons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+3)}{\ln(x)}.$$

On remarque qu'on a une F.I $\frac{+\infty}{+\infty}$.
On a :

$$\begin{aligned} \frac{\ln(2x+3)}{\ln(x)} &= \frac{\ln(x(2+\frac{3}{x}))}{\ln(x)} \\ &= \frac{\ln(x)+\ln(2+\frac{3}{x})}{\ln(x)} \\ &= 1 + \frac{\ln(2+\frac{3}{x})}{\ln(x)}, \quad \forall x > 1 \end{aligned}$$

On a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(2+\frac{3}{x}) = \ln(2)$.
Et puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2+\frac{3}{x})}{\ln(x)} = 0$.
Ainsi,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(2x+3)}{\ln(x)} = 1.$$

Exercice 4. Soit f définie par :

$$f(x) = \sin(x) - x + 2.$$

1/ Déterminons les points critiques de f.
On a : $f'(x) = \cos(x) - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
a est un point critique de f ssi $f'(a) = 0$ ssi $\cos(a) = 1$ ssi $a = 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$.
Donc l'ensemble des points critiques de f est :

$$\{2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

2/ Nature des points critiques :
On a $f''(x) = -\sin(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Donc :

$$f''(2k\pi) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

On en déduit que les points $2k\pi$ sont des points d'inflexion (ne sont pas des extremums pour f).

Exercice 5. Soit f définie par :

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} \sqrt{1+x}.$$

1/ Déterminons le D. L de f en 0 à l'ordre 2.
On a :

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{2}} &= 1 + \frac{\frac{x}{2}}{1!} + \frac{(\frac{x}{2})^2}{2!} + x^2\varepsilon_1(x) \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon_1(x); \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{8} + x^2\varepsilon_2(x); \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Donc par multiplication, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon_2(x) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon_1(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{4} + x^2\varepsilon(x) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)$.

2/Pour obtenir l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = 0$, il suffit d'extraire du DL précédent la partie de degré inférieur ou égal à 1. L'équation de la tangente est donc :

$$y = 1 + x.$$

3/ Pour déterminer la position du graphe de f par rapport à la tangente au point d'abscisse $x = 0$, il faut étudier le signe de $f(x) - (x+1)$. Pour cela, il suffit de regarder le signe du coefficient du terme d'ordre 2 dans le DL précédent, qui est positif (égal à $\frac{1}{4}$). Donc le graphe de f est au dessus de la tangente.