Une correction de l'examen final de février 2007

Cette note, qui n'engage que son auteur, a pour but de donner des indications aux exercices posés à l'épreuve de février 2007. Nous vous invitons à une lecture active : lire, réfléchir, comprendre, rédiger, ...

Question 1 : Remarquons que f est une fonction paire, c'est-à-dire $f(-x) = f(x)$ pour tout réel x. La fonction f est définie et dérivable en tout point x de $\mathbf{R}$ et

$$f'(x) = 2ex - 2xe^{x^2} = 2x(e - e^{x^2}).$$

D'autre part, nous avons :
$e - e^{x^2} \geq 0$
$\Leftrightarrow e \geq e^{x^2}$
$\Leftrightarrow 1 \geq x^2$ (en prenant le logarithme qui est une fonction croissante)
$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.
Nous en déduisons que :
f est croissante sur $]-\infty; -1] \cup [0; 1]$,
f est décroissante sur $[-1; 0] \cup [1; +\infty[$.

Question 2 : Nous appliquons le principe des croissances comparées vu en cours :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -e^{x^2} = -\infty.$$

Question 3 : Commençons par déterminer les points stationnaires de f qui sont les solutions de l'équation $f'(x) = 0$. Nous calculons donc la dérivée de f :

$$f'(x) = 4x^3 - 16x^2 + 12x = 4x(x^2 - 4x + 3).$$

Les points stationnaires de f sont donc atteints en $x = 0$, $x = 1$ et $x = 3$. Pour déterminer la nature de ces points, nous allons les évaluer sur la dérivée seconde de f, où

$$f''(x) = 12x^2 - 32x + 12 = 4(3x^2 - 8x + 3).$$

Nous avons :
$f''(0) = 12 > 0$ et donc f atteint un minimum au point d'abscisse $x = 0$,
$f''(1) = -8 < 0$ et donc f atteint un maximum au point d'abscisse $x = 1$,
$f''(3) = 24 > 0$ et donc f atteint un minimum au point d'abscisse $x = 3$.

Question 4 : Il suffit d'appliquer les formules rappelées dans l'énoncé pour obtenir successivement que :

$$\sqrt{1 + 2x} = 1 + x - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_4(x)$$

$$\sqrt{1+2x}-1 = x-\frac{x^2}{2}+x^2\epsilon_4(x)$$
$$e^{\sqrt{1+2x}-1} = 1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+x^2\epsilon_5(x) = 1+x+x^2\epsilon_5(x)$$
$$\alpha\ln(1+2x) = \alpha x-\alpha\frac{x^2}{2}+x^2\epsilon_6(x).$$

Finalement nous obtenons :

$$f(x) = \Big(1+x+x^2\epsilon_5(x)\Big)-\Big(\alpha x-\alpha\frac{x^2}{2}+x^2\epsilon_6(x)\Big) = 1+(1-\alpha)x+\alpha\frac{x^2}{2}+x^2\epsilon_7(x)$$

où $\lim_{x\to 0}\epsilon_i(x) = 0$.

Question 5 : Pour obtenir l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = 0$, il suffit d'extraire du DL précédent la partie de degré inférieur ou égal à 1. L'équation de la tangente est donc :

$$y = 1+(1-\alpha)x.$$

Question 6 : Pour déterminer la position du graphe de f par rapport à la tangente au point d'abscisse $x = 0$, il faut étudier le signe de $f(x)-\Big(1+(1-\alpha)x\Big)$. Pour cela, il suffit de regarder le signe du coefficient du terme d'ordre 2 dans le DL précédent. Nous obtenons donc :
si $\alpha > 0$ alors le graphe de f se situe au dessus de la tangente au point d'abscisse $x = 0$,
si $\alpha < 0$ alors le graphe de f se situe au dessous de la tangente au point d'abscisse $x = 0$.

Question 7 : Nous calculons la différence entre deux termes consécutifs :

$$U_{n+1}-U_n = \frac{\sin^2(n+1)}{3^{n+1}} \geq 0, \quad \forall n \geq 1$$

ce qui prouve que la suite (U_n) est croissante.

Question 8 : Nous avons vu en cours que $\sin^2(x) \leq 1$ pour tout réel x. Nous en déduisons, en majorant chaque terme de U_n, que :

$$U_n = \frac{\sin^2(1)}{3^1}+\frac{\sin^2(2)}{3^2}+\frac{\sin^2(1)}{3^3}+\cdots+\frac{\sin^2(1)}{3^n} \leq \frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}.$$

On reconnait dans le membre de droite la somme partielle d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$, en particulier :

$$\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$= \frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}\Big(1 - \Big(\frac{1}{3}\Big)^n\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(1 - \Big(\frac{1}{3}\Big)^n\Big)$$
$$< \frac{1}{2} \quad \text{car} \quad 1 - \Big(\frac{1}{3}\Big)^n < 1 \quad \text{si} \quad n \geq 1.$$

Nous en déduisons alors que :

$$U_n < \frac{1}{2} \quad \text{pour tout entier } n \geq 1$$

autrement dit la suite (U_n) est majorée.

Question 9 : Nous venons de voir que (U_n) est une suite croissante et majorée ; d'après le cours (U_n) est une suite convergente. Il existe donc un unique nombre réel ℓ tel que $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$. Nous déduisons alors de la question précédente :

$$U_n < \frac{1}{2} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = \ell \leq \frac{1}{2}.$$

Question 10 :
Au bout de la 1ère année, le capital disponible est :

$$100 + 0.04 \times 100 = 100 \times 1.04.$$

Au bout de la 2ème année, le capital disponible est :

$$(100 \times 1.04) + 0.04 \times (100 \times 1.04) + 100 + 0.04 \times 100 = 100 \times (1.04 + 1.04^2).$$

Au bout de la 3ème année, le capital disponible est :

$$100 \times (1.04 + 1.04^2 + 1.04^3).$$

Par récurrence, on montre qu'au bout de la nième année, le capital disponible est :

$$100 \times (1.04 + 1.04^2 + 1.04^3 + \cdots + 1.04^n) = 100 \times \frac{1 - 1.04^n}{1 - 1.04} = 100 \times \frac{1 - 1.04^n}{0.04}.$$

Question 11 : De la question précédente, nous déduisons que le montant des intérêts perçus par l'étudiant au terme de la nième année est :

$$100 \times \frac{1 - 1.04^n}{0.04} - 100n = 100\Big(\frac{1 - 1.04^n}{0.04} - n\Big).$$