Université Paris Ouest Nanterre La Défense
Licence Gestion Apprentissage
Mme Cheze

Statistiques 3ème année

Corrigé du contrôle de statistiques du 04 novembre 2010

Exercice 1

1- Soit la v.a. Y qui vaut 1 si le foyer est non équipé avec la probabilité 0,25 et 0 sinon avec la probabilité 0,75. On considère l'échantillon $(Y_1, ..., Y_{10})$. Soit $X = \sum_{i=1}^{10} Y_i$. X suit une loi binomiale $B(10; 0,25)$.

2- $P(X = 4) = C_4^{10}\ 0,25^4\ 0,75^6 = 0,146$.

3- $E(X) = 10 * 0,25 = 2,5$, $V(X) = 10 * 0,25 * 0,75 = 1,875$ et $\sigma = \sqrt{1,875} = 1,3693$.

4- Sur ses 10 contacts, chacun de vous peut espérer toucher combien de foyers non équipés: $E(X) = 10 * 0,25 = 2,5$ et combien de foyers déjà équipés: 10 - 2,5 = 7,5.

5- Comme $n \geq 30$, $np = 100 * 0.25 \geq 5$ et $n * 0,75 \geq 5$ on peut appliquer le théorème central limite à l'échantillon $(Y_1, ..., Y_{100})$ de loi de bernoulli(p) :

ainsi $Z = \dfrac{\bar{Y}_n - E(\bar{Y}_n)}{\sqrt{V(\bar{Y}_n)}} = \sqrt{100}\ \dfrac{\frac{X}{n} - 0.25}{\sqrt{0.25 * 0.75}}$ suit approximativement une loi $N(0, 1)$.
Donc $P(X < 20) = P(Z < -1,1947) = 1 - 0,8749 = 0,1251$.

6- $P(X > 50) = P(Z > 5,77) \simeq 0$.

Exercice 2

A.
1- Quelle est la population étudiée ? les usagers. Quelle est la variable observée ? X = le temps d'attente. X suit une loi $N(10, 3^2)$.

2- Soit $Z = \dfrac{X - 10}{3}$ qui suit une loi $N(0, 1)$.
$P(X < 15) = P(Z < \frac{5}{3}) = 0,9525$.
$P(X < 3) = P(Z < -\frac{7}{3}) = 1 - 0,9901 = 0,0099$.

3- $P(X < x) = 0,75 = P(Z < \dfrac{x-10}{3})$ donc par lecture de table, $z = 0,675$, d'où $x = 12,025$.

4- $P(X > x) = 0,05 = P(Z > \dfrac{x-10}{3})$ donc par lecture de table, $z = 1,645$, d'où $x = 14,935$.

5- $P(a < X < b) = 0,9 = P(\dfrac{a-10}{3} < Z < \dfrac{b-10}{3}) = P(-z < Z < z)$ donc par lecture de table, $z = 1,645$, d'où $a = 5,065$ et $b = 14,935$.

B. Soit $Z = \sqrt{9}\ \dfrac{\bar{X}_n - 10}{3}$ qui suit une loi $N(0,1)$.
$P(a < \bar{X}_n < b) = 0,9 = P(\sqrt{9}\ \dfrac{a-10}{3} < Z < \sqrt{9}\ \dfrac{b-10}{3}) = P(-z < Z < z)$ donc par lecture de table, $z = 1,645$, d'où $a = 8,355$ et $b = 11,645$.

C.
1- $\bar{x}_n = 14$.

2- $s^2 = 2,5^2$ donc une estimation sans biais de la dispersion des temps d'attente est donnée par $s^{*2} = \frac{9}{8}\ 2,5^2 = 7,0313$.

3- Pour construire l'intervalle de confiance pour m, on utilise un bon estimateur de m: $\bar{X}_n$ estimateur convergent de m. Soit $Z = \sqrt{n}\ \dfrac{\bar{X}_n - m}{S^*}$ suit une loi de student $T(8)$.

Posons $0.95 = P(a < \bar{X}_n < b) \ = \ P(-t < Z < t)$ où le quantile $t = 2,306$ est lu dans la table de la student(8).

D'où $11,9618 \ < \ m \ < \ 16,0383$.