Corrigé

A- **1.** Population = les jours;
Variable aléatoire X observée sur les individus de la population = « nombre de commandes».
Son espérance mathématique est m = 140
Ce nombre dépend des décisions individuelles d'achat, qui en général sont indépendantes entre elles d'un jour sur l'autre (et indépendantes entre elles).

2. Cette question concerne la variable X; elle demande de calculer P(X>160) ;
cela nécessite de connaître la distribution de X (loi de probabilité), qui n'est pas indiquée. Si c'était une loi Normale : la VA centrée-réduite correspondante serait $\frac{X-140}{48}$, suivrait N(0 ;1) et serait notée Z ;

$P(X>160 \,/\, X \text{ suit } N(140\,;48)) = P(\frac{X-140}{48} > \frac{160-140}{48}) = P(Z>0{,}42) = 1 - P(Z \le 0{,}42) = 1-0{,}6628=0{,}3372 \approx 33{,}7\%$

Si X était Normale, la probabilité, un jour donné, d'enregistrer plus de 160 commandes serait 33,7%

3. Grâce à la remarque de la question 1, on peut considérer que les nombres de commandes observés n jours ouvrés consécutifs constituent un échantillon (X_1 , X_2 , … X_i …, , X_n) de la variable X [les X_i sont indépendantes, et suivent toutes la même loi, celle de X].
Le nombre-moyen-sur-n-jours des commandes journalières correspond à $\overline{X}_n$ dont la moyenne est celle de X ; l'écart-type est celui de X divisé par $\sqrt{n}$; X suivant une loi inconnue, d'après le théorème centrale limite, $\overline{X}_n$ centrée, réduite suit une loi considérée-comme-Normale **si n >30**:; si n<30 la loi de $\overline{X}_n$ est inconnue.
Pour n = 36 : $\frac{\overline{X}_{36}-140}{8}$ suit (approximativement) N(0 ;1)
Il s'agit de calculer $P(\overline{X}_{36}>160)$:
$P(\overline{X}_{36}>160) = P(\frac{\overline{X}_{36}-140}{8} > \frac{160-140}{8} \,/\, \frac{\overline{X}_{36}-140}{8} \text{ suit app. } N(0\,;1)) \approx P(Z>2{,}5) = 1-P(Z\le 2{,}5) = 1-0{,}9938 = 0{,}0062$
Sur 36 jours, la probabilité d'observer plus de 160 commandes par jour est (approximativement) 0,6%

Exercice 2

1- Soit X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le ième électeur est favorable au candidat C avec la probabilité p et qui vaut 0 si l'électeur n'est pas favorable au candidat C avec la probabilité 1-p. La variable X_i suit une loi de $Be(p)$.

D'après le théorème central limite appliqué à l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$, la variable aléatoire $Z = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}$ converge vers une v.a. de loi normale centrée, réduite $N(0,1)$ dès que $n > 30$, $np > 5$ et $n(1-p) > 5$.

Posons $0.80 = P(-t < Z < t)$ où le quantile $t = 1.285$ est lu dans la table de la loi normale et, ainsi, l'intervalle de confiance pour p, est donné par

$$P\left(\bar{X}_n - 1.285\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p < \bar{X}_n + 1.285\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 0.80$$

En substituant, de part et d'autre de l'inégalité, le paramètre p par son estimation $\bar{x}_n$ on obtient finalement une fourchette d'estimation asymptotique pour p, à partir de l'échantillon des observations $(x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$\bar{x}_n - 1.285\sqrt{\frac{\bar{x}_n(1-\bar{x}_n)}{n}} < p < \bar{x}_n + 1.285\sqrt{\frac{\bar{x}_n(1-\bar{x}_n)}{n}}.$$

Pour $n = 400$, $\bar{x}_n = 0,49$, on obtient donc
$0.4579 \; < \; p \; < \; 0.5221$.
Vérifions à postériori les conditions d'application du TCL: $n*0.4579 > 5$ et $n*(1-0.5221) > 5$, l'intervalle de confiance est bien validé.

2- Personne ne peut dire si :
a : la valeur inconnue de p se trouve avec certitude entre les 2 bornes de l'intervalle de confiance.
b : p n'appartient pas à cet intervalle g : notre échantillon donne un intervalle qui recouvre p

On peut dire que :
c : on ne peut accorder à cet intervalle qu'une confiance de 80% e : 80% des intervalles construits à partir d'échantillons de taille 400 recouvrent (contiennent) p
f : 20% de ces intervalles ne recouvrent pas p
h : il est possible que p ne soit pas dans notre intervalle

Il est faux de dire que :
d : p a 80% de chances d'tre dans cet intervalle (car rien n'est plus aléatoire dans l'inégalité $0,4579 < p < 0,5221$)