Eléments de correction de l'épreuve du 2 avril 2007

Tout appareil électronique est interdit.

Exercice 1. Soit $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$.

(1) Montrer que P est un sous-espace vectoriel.

> Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in P$, montrons que $\alpha\ X + \beta\ Y\ \in P$ pour tout $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.
>
> $\alpha\ X + \beta\ Y\ = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\ x_1 & +\beta\ y_1 \\ \alpha\ x_2 & +\beta\ y_2 \\ \alpha\ x_3 & +\beta\ y_3 \end{pmatrix}$ et $\alpha\ x_1\ + \beta\ y_1\ =\ \alpha\ x_2\ + \beta\ y_2$
> car X et $Y\ \in P$, d'où $z_1\ =\ z_2$.

(2) Rappeler la définition d'une base.

> Une base est une famille libre et génératrice de vecteurs.

(3) Donner une base de P.

> P est un plan, il est donc de dimension 2, il suffit donc de trouver deux vecteurs de P non proportionnels pour avoir une base. Soit par exemple $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

(4) Quelle est la dimension de P ?

> La dimension de P est 2.

Exercice 2. Soient les vecteurs $u_1 = (1, 0, 2)$, $u_2 = (2, 1, 0)$, $v_1 = (3, 2, -2)$, $v_2 = (3, 1, m)$ où $m \in \mathbb{R}$.

(1) Donner une équation du sous-espace vectoriel P engendré par les vecteurs u_1 et u_2.

> Un vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ appartient P si et seulement si il existe deux réels a et b tels que : $v\ =\ au_1\ +\ bu_2 \iff \begin{cases} a + 2b &= x \\ b &= y \\ 2a &= z \end{cases}$ En remplaçant a et b par leur valeur dans la première équation, on obtient : $x - 2y - \dfrac{z}{2} = 0$.

(2) Montrer que la famille $\{u_1, u_2, v_1\}$ est liée.

> $v_1 = 2\ u_2\ -\ u_1$

(3) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre m la famille $\{u_1, u_2, v_2\}$ est-elle libre ?

Cherchons m tel que : $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 v_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 + m\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

De la troisième équation, on obtient $\lambda_1 = -\frac{m}{2}\lambda_3$ et de la deuxième équation, on obtient $\lambda_2 = -\lambda_3$ que l'on remplace dans la première : $\lambda_3(-\frac{m}{2}+1) = 0$. Pour avoir une solution unique $(0,0,0)$, il faut que $-\frac{m}{2}+1 \neq 0$. Donc, la famille $\{u_1, u_2, v_2\}$ est libre si $m \neq 2$.

(4) On suppose désormais que $m = 0$. Montrer que $2x - 6y - 3z = 0$ est une équation du plan Q engendré par les vecteurs v_1 et v_2 .

Un vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ appartient Q si et seulement si il existe deux réels a et b tels que : $v = av_1 + bv_2 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3a + 3b & = & x \\ 2a + b & = & y \\ -2a & = & z \end{array} \right.$ De la troisième équation, on obtient $a = -\frac{z}{2}$ et de la deuxime équation, on obtient $b = y + z$ que l'on remplace dans la première : $-\frac{3z}{2} + 3y + 3z = x$ que l'on multiplie par 2 pour obtenir le résultat demandé.

(5) Donner une base de $P \cap Q$.

P $\cap Q$ est une droite passanr par l'origine, donc de dimension 1. Une base de $P \cap Q$ est donc composée d'un vecteur $v = (x, y, z)$ non nul de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $2x - 6y - 3z = 0$ et $x - 2y - \frac{z}{2} = 0$. Par exemple, $(3, 2, -2)$.

Exercice 3.

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer AB, $(AB)^2$ et en déduire $(AB)^{-1}$ sans calcul.

$AB = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(AB)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (AB)\ (AB)$ donc $(AB)^{-1} = AB$

(2) Expliquer pourquoi l'galit $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ n'a aucun sens.

A et B ne sont pas des matrices carrées, elles ne sont donc pas inversibles

(3) Calculer BA et montrer qu'elle n'est pas inversible.

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

En utilisant la méthode de la matrice témoin.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3)+2(1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3)-2(2) \end{array}$$

La dernière ligne étant nulle, la matrice n'est pas inversible.

Exercice 4. Soit le système : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \\ 2\,x & + & y & - & 2\,z & = & -1 \\ x & + & y & + & 3\,z & = & 16 \end{array}\right.$, $\quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

Déterminer l'ensemble de ses solutions par la méthode du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1/2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1)/2 \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 7/2 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2)-2(1) \\ (3)-(1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 2 & 7/2 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2)/3 \\ (3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 25/6 & 50/3 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3)-2(2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ 6/25(3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1)+1/2(3) \\ (2)+1/3(3) \\ (3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1)+(2) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

La solution est $(3,1,4)$