Corrigé du partiel du 11 décembre 2006.

Exercice 1.

1. (a) *Étudier la fonction* $u : x \mapsto 1 + (x-1)\exp x$ *et montrer que pour tout réel* x, $u(x) \geq 0$.
Remarquons tout d'abord que $u(0) = 0$. Pour montrer que $u(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, il suffit de montrer que u est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$. On calcule donc la dérivée de u :
$$u'(x) = x\mathrm{e}^x \ ,$$
qui est du signe de x puisque $\exp x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) *Étudier les variations de* $v : x \mapsto 1 - (x-1)^2 \exp x$, *et en déduire le signe de* $v(x)$ *suivant la valeur de* x. *On montrera en particulier qu'il existe un unique* $\alpha \in]-\infty, -1[$ *tel que* $v(\alpha) = 0$. *[Ne pas chercher à calculer explicitement* α.*]*
On calcule la dérivée de v :
$$v'(x) = \{-2(x-1) - (x-1)^2\}\mathrm{e}^x = (1-x^2)\mathrm{e}^x \ .$$
v' est donc strictement positive si $x \in]-1, 1[$, strictement négative si $|x| > 1$ et nulle en -1 et 1.
v est donc strictement décroissante sur $]-\infty, -1[$; $v(-1) = 1 - 4/\mathrm{e} < 0$ et $\lim_{x \to -\infty} v(x) = 1$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $\alpha \in]-\infty, -1[$ tel que $v(\alpha) = 0$. v étant strictement décroissante sur cet intervalle, α est l'unique point où v s'annule. De même, il existe un unique $\beta > 1$ tel que $v(\beta) = 0$. Dressons le tableau de variation de v.

	-∞ α -1	-1 0	0 1	1 β +∞
v'	-	+	+	-
v	1 ↘ 0 ↘ 1-4/e	1-4/e ↗ 0	0 ↗ 1	1 ↘ 0 ↘ $-\infty$

(c) *Déduire de ce qui précède les variations, puis le signe de*
$$f : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \exp x$$
sur l'intervalle $]-\infty, 1[$, *et calculer les limites de* f *aux bornes de cet intervalle.*
Remarquons tout d'abord que $f(x) = u(x)/(1-x)$, donc f est positive sur $]-\infty, 1[$ et négative sur $]1, \infty[$; on a aussi $f'(x) = v(x)/(1-x)^2$, donc f' a donc même signe que v. On peut faire un tableau de variation.

	-∞ α	α -1	-1 0	0 1	1 β	β +∞
f'	+	-	-	+	+	-
f	0 ↗ $f(\alpha)$	$f(\alpha)$ ↘ $\frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}}$ ↘ 0	0 ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗	↘ $-\infty$

On note que $f(-1) = 1/2 - 1/\mathrm{e} > 0$, $f(\alpha) > 0$ et $f(\beta) < 0$.

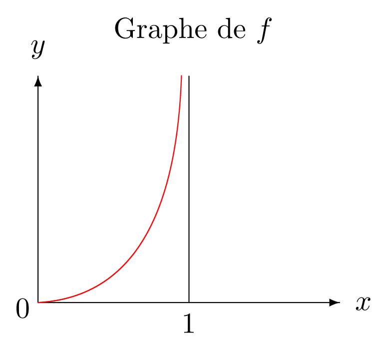
(d) *Écrire un développement limité de $f(x)$ à l'ordre 2 en 0.*
f est somme de deux fonctions, donc on effectue séparément le développement limité de chacune et on les somme pour obtenir celui de f. Les développements limités de ces deux fonctions sont obtenus par la formule de Taylor-Young.

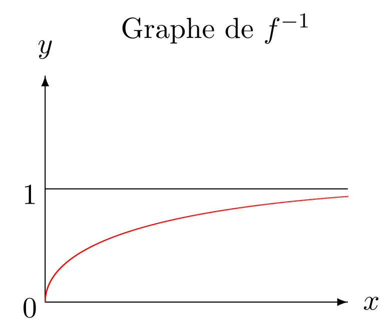
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2\epsilon_1(x) \ ,$$
$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_2(x) \ ,$$
$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) \ ,$$

avec $\lim_{x\to 0}\epsilon_1(x) = \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$ et $\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_2$, ce qui entraîne $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$. Le développement limité est donc valide.

(e) *Montrer que f réalise une bijection de $I = [0,1[$ sur un intervalle J que l'on déterminera. Étudier la dérivabilité de la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$.*
f est continue et on voit sur le tableau de variations que f est strictement croissante sur $[0,1[$, donc f est une bijection de $[0,1[$ sur $[0,\infty[$. f^{-1} est une fonction continue strictement croissante de $[0,\infty[$ dans $[0,1[$, dérivable en tout point où f' ne s'annule pas, c'est-à-dire sur $]0,1[$. Mais le développement limité de f en 0 montre que $f'(0) = 0$, et donc f^{-1} n'est pas dérivable en 0. On peut montrer que $\lim_{y\to 0, y>0}(f^{-1})'(y) = +\infty$.

(f) Représenter graphiquement f^{-1}.





2. (a) *On pose $g(x) = \sqrt{f(x)}$ pour tout $x \in]-\infty, 1[$. Calculer les limites $\lim_{x\to 0, x>0} g(x)/x$ et $\lim_{x\to 0, x<0} \frac{g(x)}{x}$. [On pourra utiliser 1(d).]*
Le développement limité obtenu en 1(d) permet d'écrire, pour $x>0$:

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + 2\epsilon(x)} \ ,$$

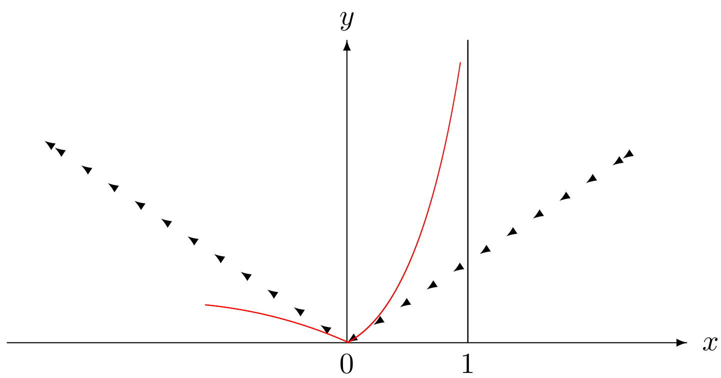
avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$. On obtient donc $\lim_{x\to 0, x>0} g(x)/x = 1/\sqrt{2}$. Du fait que $\sqrt{x^2} = -x$ si $x < 0$, on obtient que $\lim_{x\to 0, x<0} g(x)/x = -1/\sqrt{2}$.

(b) *La fonction g est-elle dérivable en 0 ?*
Non, car elle admet des dérivées à droite et à gauche en 0 disctinctes.

(c) *Étudier la position relative, au voisinage de 0, des courbes représentatives de $x \mapsto g(x)$ et $x \mapsto \frac{|x|}{\sqrt{2}}$. Faire une figure.*
Un DL à l'ordre 3 de f donne $g(x) = |x|\{1/2 + 5x/6\}^{1/2}$. On voit donc que

$g(x)$ est au dessous de la demi-droite $y = x/\sqrt{2}$ si $x > 0$ et en dessous de la demi-droite $y = -x/\sqrt{2}$ si $x < 0$.

Graphe de g



Exercice 2. *Écrire un développement limité à l'ordre* 5 *en* 0 *de* $x \mapsto \exp(\cos\{\log(\cos x)\}-1)$.

On commence par développer la fonction cos à l'ordre 5. Par parité, le DL à l'ordre 4 est égal au DL à l'ordre 5 :

$$\cos(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24 + x^5\epsilon_1(x)\ .$$

Un DL à l'ordre 3 de $\log(1+u)$ avec $u = -x^2/2+x^4/24+x^5\epsilon_1(x)$ donnera un DL à l'ordre 5 de $\log(\cos(x))$:

$$\begin{aligned}\log(\cos(x)) &= \log(1+u) = u - u^2/2 + u^3/3 + u^3\epsilon_2(u)\\ &= -x^2/2 + x^4/24 - (-x^2/2 + x^4/24)^2/2 + x^5\epsilon_3(x)\\ &= -x^2/2 - x^4/12 + x^5\epsilon_4(x)\ .\end{aligned}$$

Remarque : les termes d'ordre 3 du DL de $\log(1+u)$ sont non significatifs, mais il est nécessaire de les écrire tout d'abord pour en être sûr.
On reprend le DL ce $\cos(v)$ avec cette fois-ci $v = -x^2/2 - x^4/12 + x^5\epsilon_4(x)$. Un DL à l'ordre 2 de $\cos(u)$ donne en fait un DL à l'ordre 3, ce qui suffit donc :

$$\begin{aligned}\cos(\log(\cos(x))) &= 1 - v^2/2 + v^3\epsilon_5(v)\\ &= 1 - (-x^2/2 - x^4/12)^2 + x^5\epsilon_6(x)\\ &= 1 - x^4/8 + x^5\epsilon_7(x)\ .\end{aligned}$$

On conclut aisément :

$$\exp(\cos\{\log(\cos x)\} - 1) = \exp(-x^4/8 + x^5\epsilon_7(x)) = 1 - x^4/8 + x^5\epsilon(x)\ .$$