Corrigé de l'examen du 29 janvier 2007

Exercice 1 Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} .$$

On applique le critère de Dalembert.

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{((n+1)!)^2}{n!}\frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= \frac{(1+1/n)^2}{4(1+1/(2n))(1+1/n)} \to 1/4 .\end{aligned}$$

La limite du rapport u_{n+1}/u_n est donc positive et strictement plus petite que 1, donc la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 2 Donner un développement limité à l'ordre 4 en 0 de

$$f(x) = \cos(\sin x) .$$

On effectue les développements limités de sinus et cosinus à l'ordre 4 :

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + x^4\epsilon_1(x) , \\ \cos(u) &= 1 - \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{24} + u^4\epsilon_2(u) ,\end{aligned}$$

avec $\lim_{x\to 0}\epsilon_1(x) = \lim_{x\to 0}\epsilon_2(x) = 0$. On reporte le développement de $\sin(x)$ dans celui de $\cos(u)$ en posant $u = x - \frac{x^3}{6} + x^4\epsilon(x)$. On obtient, en ne gardant que les termes significatifs à l'ordre 4 :

$$\begin{aligned}\cos(\sin(x)) &= 1 - (x - x^3/6)^2/2 + (x - x^3/6)^4/24 + x^4\epsilon_3(x) \\ &= 1 - x^2/2 + x^4/6 + x^4/24 + x^4\epsilon_4(x) \\ &= 1 - x^2/2 + 5x^4/24 + x^4\epsilon_4(x) ,\end{aligned}$$

avec $\lim_{x\to 0}\epsilon_3(x) = \lim_{x\to 0}\epsilon_4(x) = 0$.

Exercice 3 Soit $f : x \mapsto x^2 \exp(-x)$. Montrer que la restriction de f à l'intervalle $I = [0,1]$ réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera. On note g la réciproque de f. En quels points de J la fonction g est-elle dérivable ? non dérivable ? Justifiez votre réponse à l'aide des théorèmes du cours.

La fonction f est dérivable sur I et sa dérivée est

$$f'(x) = x(2-x)\mathrm{e}^{-x} .$$

La dérivée f' est strictement positive sur $]0,1[$, donc f est strictement croissante sur I. C'est donc une bijection, et sa réciproque g est continue sur l'image de I par f : $f(I) = [0, 1/\mathrm{e}]$. On sait que la fonction réciproque g d'une fonction dérivable f est elle aussi dérivable en tout point où f' est non nulle. Dans le cas présent, f' s'annule uniquement en 0, donc g est dérivable en tout point de $]0, 1/\mathrm{e}]$ mais pas en 0.

Exercice 4 On rappelle que la fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ comme la réciproque de la fonction tangente, est strictement croissante et vérifie :

$$\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} .$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

1. Calculer $f'(x)$.
   La fonction dérivée de la fonction tangente est $1+\tan^2(x)$, strictement positive sur $]-\pi/2, \pi/2[$, donc sa réciproque est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vaut

   $$\arctan'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2} .$$

   La dérivée de la fonction f est donc $f'(x) = -1/(1+x^2)$.
2. Etablir le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+$.

	0		$+\infty$
f'		-	
f	$\pi/2$	$\searrow$	0

3. Etudier la suite $u_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ (monotonie, limite).
   La suite u_n est donc décroissante et sa limite en $+\infty$ est 0.

4. Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis, que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{1}{1+n^2} \leq u_{n-1} - u_n \leq \frac{1}{1+(n-1)^2} \ .$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]n-1, n[$ tel que

$$f(n) - f(n-1) = f'(c) \ .$$

La dérivée de f est $f'(x) = -1/(1+x^2)$. C'est donc une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. On a donc l'encadrement

$$f'(n-1) \leq f(n) - f(n-1) \leq f'(n) \ ,$$

ce qui est l'inégalité recherchée.

5. Montrer que pour toute suite v_n à termes positifs ou nuls, et pour tout entier n :

$$\sum_{i=0}^{i=n} v_i \geq \sum_{i=1}^{i=n+1} i(v_{i-1} - v_i) \ .$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=n+1} i(v_{i-1} - v_i) &= \sum_{i=1}^{n} iv_{i-1} - \sum_{i=1}^{i=n+1} iv_i = \sum_{i=0}^{n} (i+1)v_i - \sum_{i=1}^{i=n+1} iv_i \\ &= \sum_{i=0}^{n} v_i \ - \ (n+1)v_{n+1} \leq \sum_{i=0}^{n} v_i \ .\end{aligned}$$

6. En déduire que pour tout n,

$$\sum_{k=0}^{n} u_n \geq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{k^2+1} \ .$$

On applique le résultat précédent à la suite u_n et en utilisant la question (4) :

$$\sum_{k=0}^{n} u_n \geq \sum_{k=1}^{n+1} k(v_{k-1} - v_k) \geq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{k^2+1} \ .$$

7. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{n}{n^2+1}$? (Utiliser un critère du cours)

   On sait que la série de terme général $1/n$ est divergente. Or, pour tout $n \geq 1$, on a

   $$n/(n^2+1) \geq n/(2n^2) = 1/(2n) \ .$$

   La série de terme général $1/(n^2+1)$ est minorée par une série divergente, donc divergente.

8. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ? (Utiliser les questions précédentes et un critère du cours).

   De la question 6 et la question précédente, on déduit que la série de terme général u_n est divergente.