Licence de Gestion. 3ème Année — Année universitaire 2006-2007
Optimisation Appliquée — P. Fougères

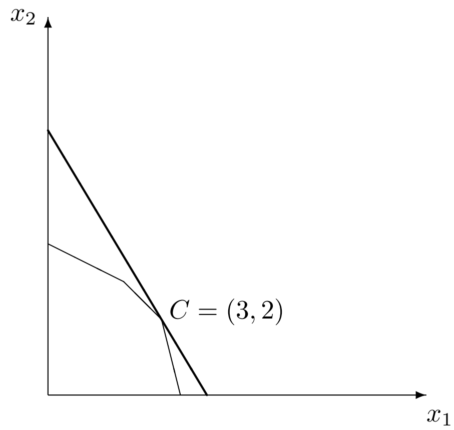
Correction de l'épreuve intermédiaire de mai 2007.

Exercice 1.

1. Le programme s'écrit

$$\text{Maximiser} \qquad z = 50\,x_1 + 30\,x_2$$
$$s.l.c.\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_1 \ , \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. Sur la figure ci-dessous, on a tracé le domaine de production et la droite isomarge la plus haute qui l'intersecte. Le point obtenu à l'intersection est l'optimum $C =^t (3,2)$. Les droites isomarges sont de pente $-5/3$.



3. Le programme sous forme standard s'écrit

$$\text{Maximiser} \qquad z = 50\,x_1 + 30\,x_2$$
$$s.l.c.\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 15 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 14 \\ x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ , \ x_4 \ , \ x_5 \geq 0 \end{cases}$$

L'optimum est obtenu en $\widetilde{X} =^t (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4, \hat{x}_5) =^t (3,2,0,1,0)$. La base optimale est donc $I = \{1,2,4\}$.

4. Les conditions d'optimalité au point $\hat{X} =^t (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ affirment qu'il existe un vecteur de prix duaux $\pi = (u_1, u_2, u_3)$ vérifiant :

$\max z = 50\,x_1 + 30\,x_2$	contraintes duales	relations de complémentarité
$3x_1 + 3x_2 \leq 15$	$u_1 \geq 0$	$u_1(15 - 3\hat{x}_1 - 3\hat{x}_2) = 0$
$x_1 + 2x_2 \leq 8$	$u_2 \geq 0$	$u_2(8 - \hat{x}_1 - 2\hat{x}_2) = 0$
$4x_1 + x_2 \leq 14$	$u_3 \geq 0$	$u_3(14 - 4\hat{x}_1 - \hat{x}_2) = 0$
$x_1 \geq 0$	$50 - 3u_1 - u_2 - 4u_3 \leq 0$	$\hat{x}_1(50 - 3u_1 - u_2 - 4u_3) = 0$
$x_2 \geq 0$	$30 - 3u_1 - 2u_2 - u_3 \leq 0$	$\hat{x}_2(30 - 3u_1 - 2u_2 - u_3) = 0$

La deuxième contrainte étant desserrée à l'optimum, $u_2 = 0$. Et comme $\hat{x}_1 \neq 0$ et $\hat{x}_2 \neq 0$, les deux dernières relations de complémentarité donnent :

$$\begin{cases} 3u_1 + 4u_3 & = 50 \\ 3u_1 + u_3 & = 30 \end{cases}$$

Ce qui donne $u_1 = 70/9$ et $u_3 = 20/3$. D'où le vecteur de prix duaux $\pi = \left(\frac{70}{9}, 0, \frac{20}{3}\right)$.

5. Lors d'une augmentation marginale de la capacité de production de l'atelier 2, on a $\Delta marge = u_2 \Delta b_2 = 0$ et donc $\Delta\text{profit} = \Delta\text{marge} - \Delta\text{coûts fixes} \leq 0$. L'augmentation de cette capacité n'est pas profitable.
6. On a vu que $I = \{1, 2, 4\}$. Ainsi,

$$B^I d = b \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Ce qui équivaut encore à

$$\begin{cases} d_1 & = \frac{3b_3 - b_1}{9} \\ d_2 & = \frac{4b_1 - 3b_3}{9} \\ d_3 & = -\frac{7}{9}b_1 + b_2 + \frac{1}{3}b_3 \end{cases}.$$

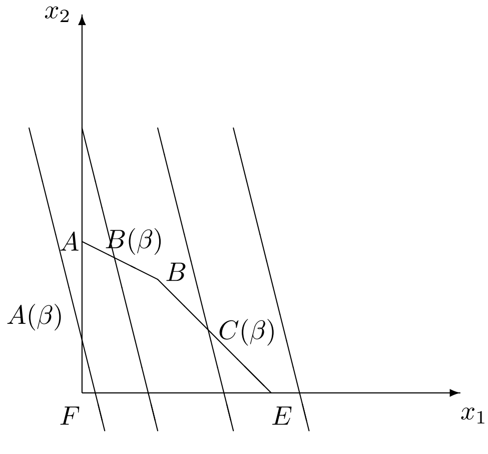
On a $b \in S(I)$ ssi $d \geq 0$. Ce qui s'écrit

$$\begin{cases} \frac{3}{4}b_3 \leq b_1 \leq 3b_3 \\ b_2 \geq \frac{7}{9}b_1 - \frac{1}{3}b_3 \end{cases}.$$

7. Lors d'une variation marginale du second membre b_3, on a $\Delta\hat{z} = u_3 \, \Delta b_3$ où u_3 est le prix dual optimal correspondant. Si $\Delta b_3 = 1$, on obtient $\Delta\hat{z} = u_3 \simeq 6,66$€ .
8. D'après la formule précédente, le prix dual u_3 est l'augmentation de marge optimale induite par une augmentation marginale d'une heure de la capacité de production de l'atelier 3.
9. On a

$$\Delta\text{profit} = \Delta\text{marge} - \Delta\text{coûts fixes} = u_3\Delta b_3 - 5\Delta b_3 = 1,66\Delta b_3 \geq 0.$$

L'extension est profitable.
10. Pour trouver les points anguleux de la courbe, on détermine pour quels paramètres b_3 la droite mobile d'équation $4x_1 + x_2 = b_3$ passe par les sommets $A =^t (0,4)$, $B =^t (2,3)$, $E =^t (5,0)$ et $F =^t(0,0)$ du polyèdre des contraintes fixes. Pour simplifier, nous noterons $b_3 = \beta$.



La droite mobile passe :

- En F pour $\beta = 0$.
- En A pour $\beta = 4$.
- En B pour $\beta = 11$.
- En E pour $\beta = 20$.

Ainsi,

- Pour $0 \leq \beta \leq 4$, l'optimum est $A(\beta) = (0, \beta)$ et donc $\hat{z}(\beta) = 30\,\beta$
- Pour $4 \leq \beta \leq 11$, l'optimum est $B(\beta) = (\frac{2\beta-8}{7}, \frac{32-\beta}{7})$ solution de $\left\{ \begin{array}{ll} x_1 + 2x_2 & = 8 \\ 4x_1 + x_2 & = \beta \end{array} \right.$ et donc $\hat{z}(\beta) = 50\,\frac{2\beta-8}{7} + 30\,\frac{32-\beta}{7} = 10\,\beta + 80$.
- Pour $11 \leq \beta \leq 20$, l'optimum est $C(\beta) = (\frac{\beta-5}{3}, \frac{20-\beta}{3})$ solution de $\left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 & = 5 \\ 4x_1 + x_2 & = \beta \end{array} \right.$ et donc $\hat{z}(\beta) = 50\,\frac{\beta-5}{3} + 30\,\frac{20-\beta}{3} = \frac{20\beta+350}{3}$.
- Pour $\beta \geq 20$, l'optimum est $E = (5, 0)$ et $\hat{z}(\beta) = 250$ est constante.

On peut alors tracer aisément le graphe de la fonction $\hat{z}(\beta)$. Les pentes de cette fonction sont les prix duaux optimaux associés à l'extension de la capacité de production de l'atelier 3 et ce pour les différentes bases optimales. Ainsi, ce prix dual est supérieur au prix d'usage de 5 € tant que $\beta \leq 20$, puis devient nul. Il faut donc étendre cette capacité de production jusqu'à 20 heures (et pas plus).

Exercice 2.

1. B est une matrice standard car son rang est égal à son nombre de lignes. $Rg(B) = 2$ car la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (par exemple) est un bloc principal.
2. B admet au plus $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$ bases. Il faut en effet choisir 2 colonnes parmi 5.
3. $B \in M_{2,5}(\mathbb{R})$ étant standard, la dimension de la variété linéaire des solutions est $5 - 2 = 3$.
4. La solution de base I est $X = X(b, I)$ donnée par $X_{\bar{I}} = 0_{\bar{I}}$ et $X_I = (B^I)^{-1}b$. Ici,

   $$B^I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ donc } (B^I)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Et d'autre part, } B^J = (B^J)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Ainsi, les solutions de bases demandées sont

   $$X(b, I) = {}^t(2b_1 - b_2, \frac{b_2 - b_1}{2}, 0, 0, 0) \text{ et } X(b, J) = {}^t(0, 0, 0, -b_1, -b_2).$$

5. La base J est admissible si $X(b, J) \geq 0$ i.e. si $b = 0$ (puisque $b \geq 0$).
6. Les conditions demandées sont $2b_1 - b_2 \geq 0$ et $b_2 - b_1 \geq 0$. On a donc

   $$S(I) = \{b = {}^t(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}b_2 \leq b_1 \leq b_2\}.$$

7. *Question supplémentaire : La solution du système homogène est donnée par la paramétrisation* $X_I = -(B^I)^{-1}B^{\bar{I}}X_{\bar{I}}$. *Ainsi,*

   $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5x_3 - x_4 \\ 2x_3 - x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8x_3 + 2x_4 - x_5 \\ \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \end{pmatrix}$$

D'où la base algébrique (écrite en vecteurs lignes) $(-8, \frac{3}{2}, 1, 0, 0)$, $(2, -\frac{1}{2}, 0, 1, 0)$ *et* $(-1, \frac{1}{2}, 0, 0, 1)$.

Exercice 3.

1. Dans la première contrainte $x_1 + 2x_2 + 5x_3$ est le nombre total d'adultes (en centaines) assistant aux 3 spectacles durant toute la durée de la programmation. Ce nombre est supérieur à 30 (centaines). La direction veut donc accueillir au moins 3000 adultes (et de même, 4000 jeunes) durant toute la durée de la programmation.

2. Le programme mis sous forme standard est :

$$\text{Maximiser} \qquad z = -c = -3\,x_1 - 2\,x_2 - 4\,x_3$$

$$s.l.c. \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & - & x_4 & & & = & 30 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & & - & x_5 & = & 40 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

La contrainte s'écrit donc $BX = b^{(0)}$, $X \geq 0$ avec la matrice B de l'exercice précédent et $b^{(0)} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix}$. Comme $b^{(0)} \in S(I)$, la base $I = \{1, 2\}$ est admissible. La solution de base associée est réalisable et on peut prendre I comme base initiale.

3. Il faut prendre garde que le test d'arrêt (i.e. les coefficients de la fonction économique sont tous négatifs) n'est valable qu'autour d'un sommet du simplexe, lorsqu'on a exprimé la fonction économique à l'aide des variables hors base (ici, 0 n'est pas un sommet car la base $J = \{4, 5\}$ n'est pas admissible). Exprimons donc les variables de bases et la fonction économique à l'aide des variables hors base. On a

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & = & 30 & - & 5x_3 & + & x_4 & \\ x_1 & + & 4x_2 & = & 40 & - & 3x_3 & & & + \; x_5 \end{array} \right. \tag{1}$$

Posons (pour cette question uniquement) $b_1 = 30 - 5x_3 + x_4$ et $b_2 = 40 - 3x_3 + x_5$. Il résulte des résultats l'exercice 2 que le système (1) admet comme solution

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & = & 2b_1 - b_2 & = & 20 & - & 7x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 \\ x_2 & = & \frac{b_2 - b_1}{2} & = & 5 & + & x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 & + & \frac{1}{2}x_5 \end{array} \right.$$

et donc $z = -3\,x_1 - 2\,x_2 - 4\,x_3 = -70 + 15x_3 - 5x_4 + 2x_5$. Le test d'arrêt est donc négatif. On va donc exécuter une itération de l'algorithme du simplexe.

La variable x_3 entre dans la base car elle possède la plus grande marge réduite. On se déplace sur l'arête correspondante en posant $x_3 = \theta \geq 0$ et $x_4 = x_5 = 0$ tant que de plus $x_1 = 20 - 7\theta \geq 0$ et $x_2 = 5 + \theta \geq 0$. On a $\theta_{\max} = \frac{20}{7}$. Comme x_1 s'annule pour $\theta = \theta_{\max}$, c'est la variable sortante et la nouvelle base est $I_1 = \{2, 3\}$.

Exprimons à nouveau variables de bases et fonction économique à l'aide des variables hors base. On obtient après calculs

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccc} x_3 & = & \frac{20}{7} & - & \frac{1}{7}x_1 & + & \frac{2}{7}x_4 & - & \frac{1}{7}x_5 \\ & & & & & & & & \\ x_2 & = & \left(5 + \frac{20}{7}\right) & - & \frac{1}{7}x_1 & + & \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{2}\right)x_4 & + & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right)x_5 \\ & = & \frac{55}{7} & - & \frac{1}{7}x_1 & - & \frac{3}{14}x_4 & + & \frac{5}{14}x_5 \end{array} \right.$$

et donc

$$\begin{aligned} z &= -70 + 15\left(\frac{20}{7} - \frac{1}{7}x_1 + \frac{2}{7}x_4 - \frac{1}{7}x_5\right) - 5\,x_4 + 2x_5 \\ &= -\frac{190}{7} - \frac{15}{7}x_1 + \left(\frac{30}{7} - \frac{35}{7}\right)x_4 + \left(\frac{14}{7} - \frac{15}{7}\right)x_5 \\ &= -\frac{190}{7} - \frac{15}{7}x_1 - \frac{5}{7}x_4 - \frac{1}{7}x_5. \end{aligned}$$

Le vecteur des marges réduites est négatif. On est donc à l'optimum. La base optimale est donc $I_1 = \{2, 3\}$ et le sommet optimal $\widetilde{X} = {}^t\!\left(0, \frac{55}{7}, \frac{20}{7}, 0, 0\right)$. Il faut donc optimalement programmer le spectacle 2 pendant 55 jours et le spectacle 3 pendant 20 jours en délaissant le spectacle 1. A cette programmation correspondra le coût (minimal) de 27142 € .

4. Les conditions d'optimalité au point $\hat{X} = {}^t(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ affirment qu'il existe un vecteur de prix duaux $\pi = (u_1, u_2)$ vérifiant :

$\max z = -3\,x_1 - 2\,x_2 - 4\,x_3$	contraintes duales	relations de complémentarité
$-x_1 - 2x_2 - 5x_3 \leq -30$	$u_1 \geq 0$	$u_1(x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 30) = 0$
$-x_1 - 4x_2 - 3x_3 \leq -40$	$u_2 \geq 0$	$u_2(x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 40) = 0$
$x_1 \geq 0$	$-3 + u_1 + u_2 \leq 0$	$\hat{x}_1(-3 + u_1 + u_2) = 0$
$x_2 \geq 0$	$-2 + 2u_1 + 4u_2 \leq 0$	$\hat{x}_2(-2 + 2u_1 + 4u_2) = 0$
$x_3 \geq 0$	$-4 + 5u_1 + 3u_2 \leq 0$	$\hat{x}_3(-4 + 5u_1 + 3u_2) = 0$

Comme $\hat{x}_1 = 0$, $\hat{x}_2 = \frac{55}{7} \neq 0$ et $\hat{x}_3 = \frac{20}{7} \neq 0$ à l'optimum, on trouve le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2u_1 + 4u_2 & = & 2 \\ 5u_1 + 3u_2 & = & 4 \end{array} \right.$$

d'où l'on tire $\pi = (u_1, u_2) = (\frac{5}{7}, \frac{1}{7})$. Avoir pu trouver un tel vecteur nous a permis de vérifier que le point $\hat{X} = {}^t\!\left(0, \frac{55}{7}, \frac{20}{7}\right)$ est bien l'optimum.

5. Les prix duaux u_1 et u_2 sont utiles pour déterminer les variations de la fonction économique $z = -c$ lorsqu'on fait varier les seconds membres b_1 et b_2 du programme canonique

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = -3\,x_1 - 2\,x_2 - 4\,x_3 \\ s.l.c. \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & - & 2x_2 & - & 5x_3 & \leq & b_1 \\ -x_1 & - & 4x_2 & - & 3x_3 & \leq & b_2 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array} \right. & \end{array} \tag{2}$$

autour de leurs valeurs initiales $b_1^{(0)} = -30$ et $b_2^{(0)} = -40$. On a

$$u_1 = \frac{\Delta \hat{z}}{\Delta b_1} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{\Delta \hat{z}}{\Delta b_2},$$

lors de variations marginales. Tout d'abord, $z = -c = -c_e/1000$ où c est le coût en milliers d'euros et c_e est le coût en euros. Ensuite, $b_1 = -N_1/100$ et $b_2 = -N_2/100$ où N_1 et N_2 sont respectivement les nombres d'adultes et de jeunes que la salle désire faire venir au cours de la programmation. Ainsi,

$$u_1 = \frac{1}{10}\frac{\Delta \hat{c}_e}{\Delta N_1} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{1}{10}\frac{\Delta \hat{c}_e}{\Delta N_2}.$$

Finalement, $10u_1$ (resp. $10u_2$) est l'augmentation du coût (variable) minimal en euros due à une augmentation (d'une personne) du nombre minimal N_1 (resp. N_2) d'adultes (resp. de jeunes) que la salle souhaite accueillir au cours de la programmation.

6. *Question supplémentaire : On a, lors d'une augmentation marginale du nombre d'adultes à accueillir,*

$$\Delta \textit{profit} = \Delta \textit{revenus} - \Delta \textit{coûts variables},$$

les coûts fixes étant invariants. Or, Δrevenus $= 8\,\Delta N_1$ et Δcoûts variables $= \Delta \hat{c}_e = 10u_1 \Delta N_1 = \frac{50}{7}\Delta N_1$. D'où Δprofit $= \frac{6}{7}\Delta N_1 \geq 0$. L'extension est donc profitable. Et ce tant que le second membre $b_1 = -N_1/100$ reste dans le domaine de validité de la base $I_1 = K = \{2, 3\}$.

7. *Question supplémentaire : Cette question présente un écueil qu'il faut éviter. Le programme canonique (2) peut être mis sous forme standard de manière à ce que le second membre soit toujours ${}^t(b_1, b_2)$. Mais alors la matrice standard à considérer est $\widetilde{B} = -B$ plutôt que B. On a alors $\widetilde{B}^K = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ et $(\widetilde{B}^K)^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. On a donc*

$$b = {}^t(b_1, b_2) \in S(K) \Leftrightarrow (\widetilde{B}^K)^{-1} b \geq 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 3b_1 - 5b_2 & \geq 0 \\ -4b_1 + 2b_2 & \geq 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \frac{5}{3}b_2 \leq b_1 \leq \frac{1}{2}b_2.$$

b_2 valant -40, ceci traduit en les données économiques donne $-\frac{5}{3}40 \leq -N_1/100 \leq -\frac{1}{2}40$ i.e. $2000 \leq N_1 \leq 6666$. En particulier, on peut rétablir l'équilibre entre adultes et jeunes (4000 de chaque) de manière profitable.

8. *Question supplémentaire : En frontière du domaine, la solution réalisable optimale (de base* $K = \{2,3\}$*) est dégénérée. Pour* $b_2 = -40$ *toujours et* $b_1 = \frac{5}{3}b_2 = -66,666\ldots$ *(i.e.* $N_1 = 6666$*), c'est la variable* x_2 *qui s'annule dans* $X_K = (\widetilde{B}^K)^{-1}b$*. Ainsi, 2 sort de la base mais 3 y reste. Si on poursuit l'extension, par exemple pour* $b_1 = -70$*, on utilise uniquement le spectacle 3 pour satisfaire la contrainte* $x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 70$ *qui sera alors serrée pour* $x_3 = 14$*. Et la dernière contrainte est desserée* ($x_5 = 2$)*. L'optimum est* ${}^t(0,0,14,0,2)$*. Les conditions d'optimalité donnent* $u_2 = 0$ *(contrainte desserée) et la dernière relation de complémentarité donne* $5u_1 = 4$ *soit* $u_1 = 4/5$*. La variation de profit est alors nulle...*