I (1)

1) $\frac{1}{25}$ d'heure.

d'où la contrainte de productⁿ : $\frac{1}{25}x_1 + \frac{1}{50}x_2 + \frac{1}{75}x_3 + \frac{1}{100}x_4 \leq 50$.

2) $\max z = 10x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 5x_4$.

$$\text{s.c.} \begin{cases} \frac{1}{25}x_1 + \frac{1}{50}x_2 + \frac{1}{75}x_3 + \frac{1}{100}x_4 \leq 50 \\ x_1 \leq 1000 \\ x_2 \leq 1500 \\ x_3 \leq 3000 \\ x_4 \leq 3500 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

3) Rendements.

Pièces 1	pièces 2	pièces 3	pièces 4
250	400	300	500

On produit en priorité le type de pièces de plus grand rendement. Jusqu'à ce que la contrainte de demande soit saturée. D'où $\hat{x}_4 = 3500$.

$\frac{1}{100}\hat{x}_4 = 35$ h ↳ restent 15 h disponibles.

2ième rendement le meilleur : pièces 2.

d'où on produit pendant les 15 heures : $15 \times 50 = 750$ pièces de type 2.

d'où $\hat{x}_2 = 750$ et donc $\hat{x}_1 = \hat{x}_3 = 0$.

4) $\max 10x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 5x_4$.

$$\begin{cases} \frac{1}{25}x_1 + \frac{1}{50}x_2 + \frac{1}{75}x_3 + \frac{1}{100}x_4 + x_5 = 50 \\ x_1 + x_6 = 1000 \\ x_2 + x_7 = 1500 \\ x_3 + x_8 = 3000 \\ x_4 + x_9 = 3500. \end{cases}$$

$\hat{x}_2, \hat{x}_4 \neq 0$. $\hat{x}_9 = 0$ $\hat{x}_8 = 3000$ $\hat{x}_7 = 750$ $\hat{x}_6 = 1000$ $\hat{x}_5 = 0$.

$I = \{2, 4, 6, 7, 8\}$.

5) $x_2 = 50\,(50 -$

$x_4 = 3600 \; \cancel{-x_9} \qquad - x_9$

$x_6 = 1000 \quad - x_1$

$x_7 =$

$x_8 = 3000 \quad - x_3$

I ②

$x_2 = 50\left[50 - \frac{1}{25}x_1 - \frac{1}{75}x_3 - \frac{1}{100}(3500 - x_9) - x_5\right]$

$= 50\left[15 - \frac{1}{25}x_1 - \frac{1}{75}x_3 - x_5 + \frac{1}{100}x_9\right].$

$x_2 = 750 - 2x_1 - \frac{2}{3}x_3 - 50x_5 + \frac{1}{2}x_9.$

$x_4 = 3500 - x_9$

$x_6 = 1000 - x_1$

$x_7 = 1500 - \left(750 - 2x_1 - \frac{2}{3}x_3 - 50x_5 + \frac{1}{2}x_9\right)$

$x_7 = 750 + 2x_1 + \frac{2}{3}x_3 + 50x_5 - \frac{1}{2}x_9$

$x_8 = 3000 - x_3.$

$z = 10x_1 + 8\left(750 - 2x_1 - \frac{2}{3}x_3 - 50x_5 + \frac{1}{2}x_9\right) + 4x_3 + 5\left(3500 - x_9\right).$

$= (6000 + 17500) \underbrace{- 6x_1 - \frac{4}{3}x_3 - 50x_5 - x_9}_{\text{le test d'arrêt est positif}}.$

d'où l'optimum.

$\hat{x}_2 = 750$ $\quad \hat{x}_1 = \hat{x}_3 = \hat{x}_5 = \hat{x}_9 = 0.$

$\hat{x}_4 = 3500$

$\hat{x}_6 = 1000$

$\hat{x}_7 = 750$

$\hat{x}_8 = 3000.$

6) Max $10x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 5x_4$.

	contraintes duales	complémentarité
$\frac{1}{25}x_1 + \frac{1}{50}x_2 + \frac{1}{75}x_3 + \frac{1}{100}x_4 \leq 50$	$u_1 \geq 0$	$u_1\left(50 - \frac{1}{25}x_1 - \frac{1}{50}x_2 - \frac{1}{75}x_3 - \frac{1}{100}x_4\right) = 0$
desserrée $x_1 \leq 1000$	$u_2 \geq 0$	$u_2(1000 - x_1) = 0$
desserrée $x_2 \leq 1500$	$u_3 \geq 0$	$u_3(1500 - x_2) = 0$
desserrée $x_3 \leq 3000$	$u_4 \geq 0$	$u_4(3000 - x_3) = 0$
$x_4 \leq 3500.$	$u_5 \geq 0.$	$u_5(3500 - x_4) = 0.$
$x_1 \geq 0$ ~~, x_2, x_3, $x_4 \geq 0$~~.	$10 - \frac{1}{25}u_1 - u_2 \leq 0$	$x_1\left(10 - \frac{1}{25}u_1 - u_2\right) = 0$
$x_2 \geq 0$	$8 - \frac{1}{50}u_1 - u_3 \leq 0$	$x_2\left(8 - \frac{1}{50}u_1 - u_3\right) = 0$
$x_3 \geq 0$	$4 - \frac{1}{75}u_1 - u_4 \leq 0$	$x_3\left(4 - \frac{1}{75}u_1 - u_4\right) = 0$
$x_4 \geq 0.$	$5 - \frac{1}{100}u_1 - u_5 \leq 0$	$x_4\left(5 - \frac{1}{100}u_1 - u_5\right) = 0$

$u_2 = 0$, $u_3 = u_4 = 0$.

$x_2 \neq 0 \Rightarrow 8 - \frac{1}{50} u_1 - \underbrace{u_3}_{=0} = 0 \Rightarrow u_1 = 400 \geq 0$.

$x_4 \neq 0 \Rightarrow 5 - \frac{1}{100} u_1 - u_5 = 0 \Rightarrow u_5 = 1 \geq 0$

7) $u_1 = \frac{\Delta \hat{z}}{\Delta b_1} \geq 0$.

C'est l'accroissement de la valeur optimale de la marge lors d'une variation marginale de la capacité de production des machines (d'une heure). Et ce dans la limite où le 2^{nd} membre b reste dans le domaine de validité $V_I(B)$.

$u_5 = \frac{\Delta \hat{z}}{\Delta b_5} = 1$. C'est l'accroissement de la valeur optimale de la marge lors d'une variation marginale de la demande b_5 .

8) $u_1 = 400$ car il s'agit du rendement maximal (celui des pièces de type 4 que l'on produit en priorité)

9) Δ profit $= \Delta$ marge $- \Delta$ coûts fixes .

$= (400 - 350) \Delta b_1 \geq 0$.

L'extension est profitable .

10) On produit en priorité les ~~pièces de~~ type 4 (de rendement max) jusqu'à saturat$^{\circ}$ de la demande $b_5 = 3500$. Puis, les pièces de type 2 jusqu'à saturation de la demande $b_3 = 1500$. Les ~~rendements~~ cadences étant de 50 et 100 pièces à l'heure, on obtient $b_1^* = \frac{1500}{50} + \frac{3500}{100} = 65h$.

I ④

11) $I = \{2, 4, 6, 7, 8\}$.

$$B^I = \begin{pmatrix} 1/50 & \frac{1}{100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B^I d = b$.

$$\iff \begin{array}{l} 1/50\, d_1 + \frac{1}{100} d_2 = b_1 . \\ d_3 = b_2 \\ d_1 + d_4 = b_3 \\ d_5 = b_4 \\ d_2 = b_5 \end{array}$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} d_2 = b_5 \\ d_3 = b_2 \\ d_5 = b_4 . \\ 2d_1 + d_2 = 100 b_1 \\ d_1 = 50 b_1 - 1/2\, b_5 \\ d_4 = b_3 - d_1 = b_3 + 1/2\, b_5 - 50 b_1 . \end{array} \right.$$

$$\iff \left| \begin{array}{l} d_1 = 50 b_1 - 1/2\, b_5 \\ d_2 = b_5 \\ d_3 = b_2 \\ d_4 = b_3 + 1/2\, b_5 - 50 b_1 . \\ d_5 = b_4 . \end{array} \right.$$

$$b \in \mathcal{V}_I(B) \iff d \geq 0 \iff \left[\begin{array}{l} b_5, b_2, b_4 \geq 0 \\ b_5 \leq 100 b_1 \\ 50 b_1 \leq b_3 + 1/2\, b_5 . \end{array} \right.$$

Lors d'une variat° marginale de b_1,
$b_2 = 1000$, $b_3 = 1500$, $b_4 = 3000$, $b_5 = 3500$.

d'où $30 \leq b_1 \leq \frac{1500 + 1/2\, 3500}{50} = \frac{3250}{50} = 65$. $\hat{b}_1^*$.

12) quand b_1 dépasse 65 h, l'optimum est
$\hat{x}_1 = 3500$ $\hat{x}_2 = 1500$) nécessitent 65 h.
il reste alors $b_1 - 65$ h. que nous utilisons
pour produire le type de pièces le plus
rentable (parmi celles qui restent).

↳ ce sont les pièces 3.

d'où $\hat{x}_3 \neq 0$. $\hat{x}_2 \neq 0$, $\hat{x}_4 \neq 0$. ($\hat{x}_8 \neq 0$ autour de b_1^*)

$\hat{x}_5 = 0$ $\hat{x}_6 \neq 0$ $\hat{x}_7 = 0$ $\hat{x}_9 = 0$.
$\hat{x}_1 = 0$.

et la base optimale et $J = \{2, 3, 4, 6, 8\}$.

Les contraintes dessaturées sont maintenant
la 2^{nde} et la 4^{ième} d'où $u_2 = u_4 = 0$.

et comme $x_2, x_3, x_4 \neq 0$, on obtient.

$$\begin{cases} \frac{1}{50} u_1 + u_3 = 8 \\ \frac{1}{75} u_1 + u_4 = 4 \\ \frac{1}{100} u_1 + u_5 = 5 \end{cases}$$

$u_1 = 4 \times 75 = 300$

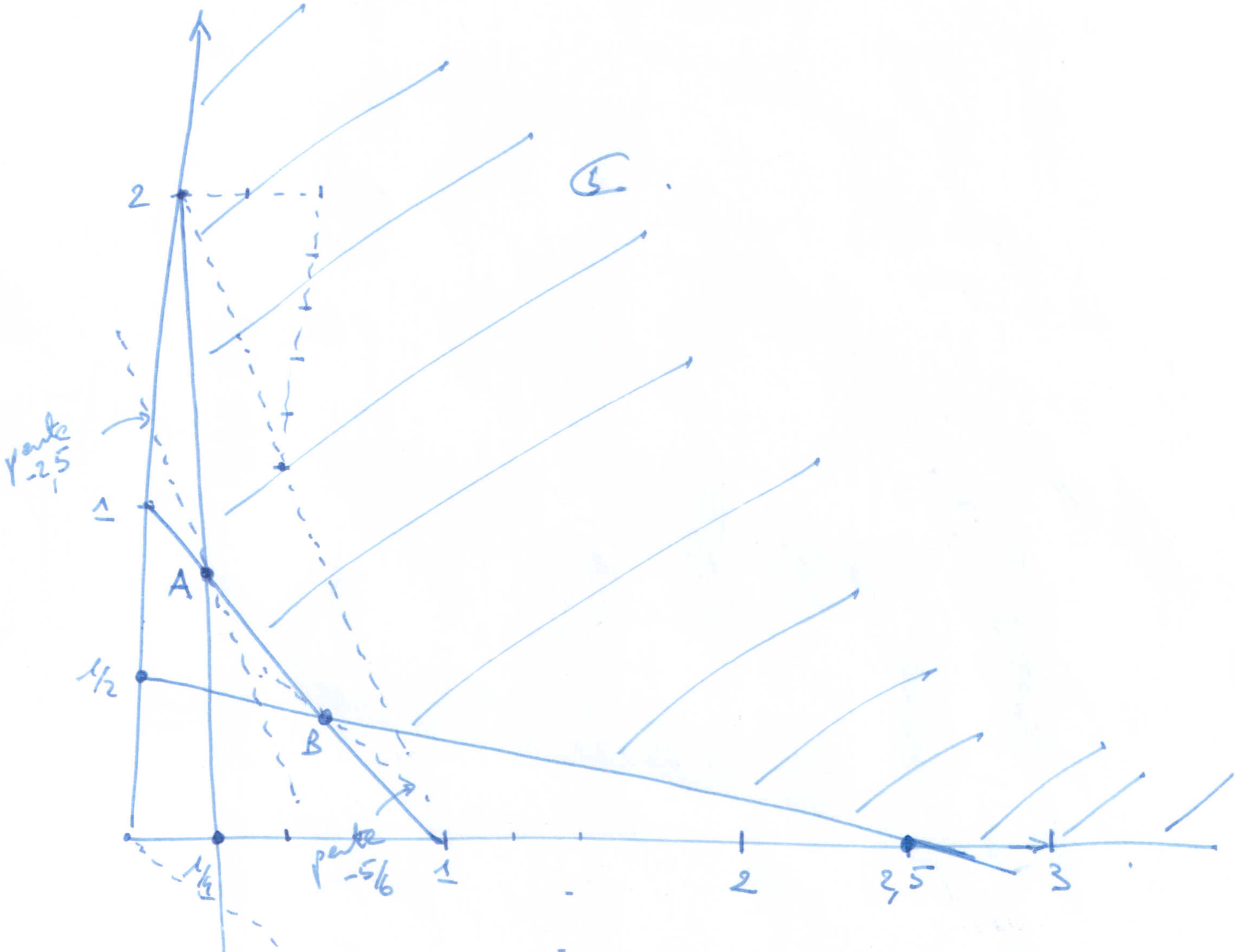
d'où $\Delta \text{profit} = 300 \, \Delta b_1 - 350 \, \Delta b_1$
$= -50 \, \Delta b_1$.

l'extension n'est plus profitable.

II 1

1) Min $0{,}5\, x_1 + 0{,}2\, x_2$.

$$(E)\begin{cases} 0{,}5\, x_1 + 0{,}5\, x_2 \geqslant 0{,}5 \\ 80\, x_1 + 10\, x_2 \geqslant 20. \\ 4x_1 + 20\, x_2 \geqslant 10. \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$



2) Droites isocoût $\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{5} x_2 = c_0$.

$x_2 = 5c_0 - \frac{5}{2} x_1$. de pente $-5/2$.

La droite isocoût la plus basse vient s'appuyer sur E

en A $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 8x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \hat{x}_1 = 1/7. \\ \hat{x}_2 = 6/7. \end{cases}$ ie environ 140g de chou et 860g d'épinards

3) droites isocoût $\frac{1}{2} x_1 + \frac{3}{5} x_2 = c_0$ $\quad x_2 = \frac{5c_0}{3} - \frac{5}{6} x_1$. de pente $-5/6$.

B $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 4 \\ 4x_1 + 20x_2 = 10 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 = 5/8 \\ 16\, x_2 = 6 \end{cases}$ $\quad x_2 = 3/8$

d'où un optimum de 625g de chou et 375g d'épinards par marmitte.

4) On met au préalable le programme sous forme compatible. L'optimum est $\hat{x}_1 = 1/7$ $\hat{x}_2 = 6/7$.

Programme primal (compatible)	Contraintes duales	Relations de complémentarité.
$\text{Max } -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{5}x_2$		
$-\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq -\frac{1}{2}$	$u_1 \geq 0$	$u_1\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}\right) = 0$
$-80x_1 - 10x_2 \leq -20$	$u_2 \geq 0$	$u_2(80x_1 + 10x_2 - 20) = 0$
$-4x_1 - 20x_2 \leq -10$	$u_3 \geq 0$	$u_3(4x_1 + 20x_2 - 10) = 0$
$x_1 \geq 0$	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u_1 + 80u_2 + 4u_3 \leq 0$	$x_1\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u_1 + 80u_2 + 4u_3\right) = 0$
$x_2 \geq 0$	$-\frac{1}{5} + \frac{1}{2}u_1 + 10u_2 + 20u_3 \leq 0$	$x_2\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2}u_1 + 10u_2 + 20u_3\right) = 0$

La 3ième contrainte est desserrée à l'optimum donc $u_3 = 0$.

De plus, $\hat{x}_1 \neq 0$ et $\hat{x}_2 \neq 0$, donc les 2 dernières relations de complémentarité donnent

$$\begin{cases} \frac{1}{2}u_1 + 80u_2 = \frac{1}{2}. \\ \frac{1}{2}u_1 + 10u_2 = \frac{1}{5}. \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{2}u_1 + 80u_2 = \frac{1}{2}. \\ 70u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}. \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} u_1 = \frac{220}{700} \\ u_2 = \frac{3}{700} \end{cases}$$

$$\Pi = \left(\frac{220}{700}, \frac{3}{700}, 0\right)$$

Trouver ces prix duaux (qui vérifient toutes les conditions d'optimalité) nous assure que l'optimum trouvé est correct.

5) Lors d'une variation du 2nd membre $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ du programme compatible à l'intérieur du domaine de validité de la base optimale

$I = \{1, 2, 5\}$, $\Delta \hat{z} = u_1 \Delta b_1 + u_2 \Delta b_2 + u_3 \Delta b_3$.

Les b_i sont en fait $-q_i$ où q_i est la quantité exigée de chaque élément.

$\hat{Z} = -\check{C}$.

d'où $\Delta(-\check{C}) = -u_1 \Delta q_1 - u_2 \Delta q_2 - u_3 \Delta q_3$.

i.e. $\Delta \check{C} = u_1 \Delta q_1 + u_2 \Delta q_2 + u_3 \Delta q_3$.

$= \frac{220}{700} \Delta q_1 + \frac{3}{700} \Delta q_2$.

C'est l'augmentat° de la quantité exigée de ~~[illegible]~~ vitamine A qui influe le plus sur le coût supplémentaire minimal pour satisfaire aux normes.