Corrigé [1]

corrigé 1

1. Comme 15 élèves étudient l'anglais et 6 les deux langues, il y a $15 - 6 = 9$ élèves qui étudient seulement l'anglais.
2. De même, $17 - 6 = 11$ élèves étudient seulement l'allemand.
3. Les élèves de la classe se répartissent en trois catégories deux à deux *disjointes* : ceux qui étudient seulement l'anglais, au nombre de 9, seulement l'allemand, au nombre de 11 et ceux qui étudient les deux langues, au nombre de 6. Il y a donc en tout $9 + 11 + 6 = 26$ élèves dans la classe.

[Remarque : on peut aussi répondre directement à la dernière question en utilisant la relation

$$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}\, A + \mathrm{card}\, B - \mathrm{card}(A \cap B)$$

donc en calculant le nombre total d'élèves comme $15 + 17 - 6 = 26$ élèves.]

corrigé 2

1. Première solution : Imaginons que chaque étudiant possède une licence par sport pratiqué, par exemple un étudiant pratiquant la natation et le cyclisme, mais pas la course aura exactement deux licences.
   - le nombre total de *licences* est $4 + 8 + 6 = 18$.
   - supposons que l'on retire exactement une licence à chacun : il reste $18 - 12 = 6$ licences, et les étudiants à qui il reste encore au moins une licence sont ceux qui pratiquaient au moins deux sports, soit 5 personnes.
   - 6 licences sont alors réparties entre les 5 personnes à qui il en reste au moins une. Donc exactement une personne a encore 2 licences en main, c'est celle qui pratiquait les trois sports.

   Conclusion : exactement un étudiant pratique les trois sports.
2. Seconde solution : on peut mettre le problème en équations, en choisissant pour inconnues a, b, c le nombre d'étudiants qui pratiquent exactement 1, 2 ou 3 sports respectivement. Le nombre total d'étudiants est

   $$a + b + c = 12 \tag{1}$$

   Le nombre d'étudiants pratiquant au moins deux sports est

   $$b + c = 5 \tag{2}$$

   Si on ajoute le nombre des étudiants qui pratiquent la natation, le cyclisme et la course, on compte une fois ceux qui pratiquent un sport, deux fois ceux qui en pratiquent deux et trois fois ceux qui en pratiquent trois, donc

   $$a + 2 \times b + 3 \times c = 4 + 8 + 16 = 18 \tag{3}$$

   Par soustraction de (1) à (3) on obtient

   $$b + 2 \times c = 18 - 12 = 6 \tag{4}$$

   et par soustraction de (2) à (4) on obtient

   $$c = 6 - 5 = 1 \tag{5}$$

   Il y a donc exactement un étudiant qui pratique les trois sports.

corrigé 4

1. Le nombre des voyageurs montés au cours du trajet est $15 + 6 + 7 + 2 = 30$. Il est égal au nombre des voyageurs descendus en B, C, D ou E, qui est égal à $9 + 8 + 7 + x = 24 + x$ où x désigne le nombre inconnu de voyageurs descendus en E. Donc $24 + x = 30$ et $x = 6$.

2. Le nombre cherché est 30, d'après la question précédente. L'ensemble des personnes qui ont voyagé se partitionne en effet en quatre parties : ceux qui sont montés en A, en B, en C et en D.

corrigé 7 Pour choisir un couple formé d'une femme et d'un homme, on choisit les femmes parmi 12, et à chacun de ces choix, on peut à nouveau choisir 15 partenaires parmi les hommes. Il y a au total $12 \times 15 = 180$ couples possibles.
[Remarque : on peut représenter la situation dans un tableau rectangulaire dont les 12 lignes correspondent aux femmes et les 15 colonnes aux hommes. Chaque case correspond à un choix possible.]

corrigé 8 Chaque personne écrit 9 lettres et il y a 10 personnes, donc en tout $10 \times 9 = 90$ lettres sont écrites.

corrigé 9 On commence par compter les couples (a, b) de personnes distinctes de cette réunion. Il y a $10 \times 9 = 90$ couples différents. À chaque couple (a, b) est associée la poignée de main échangée entre a et b. Dans cette correspondance, chaque poignée de main correspond à deux couples ((a, b) et (b, a)), il y en a donc en tout $\frac{90}{2} = 45$.

corrigé 11

1. On peut compter les points d'intersection de deux façons au moins : comme pour l'exercice des poignées de main, on compte les couples de droites distinctes, il y en a $5 \times 4 = 20$, et on remarque que chaque point d'intersection est obtenu par deux couples, il y a donc $\frac{20}{2} = 10$ points.
   Une autre façon de compter consiste à remarquer que chaque nouvelle droite ajoutée au dessin coupe toutes les précédentes et rajoute donc autant de points nouveaux : pour 5 droites, on a donc $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ points.
2. On trace les droites l'une après l'autre : d_1, d_2, d_3, d_4 puis d_5. Chaque nouvelle droite rencontre autant de régions qu'il y a d'intervalles découpés sur cette droite par ses points d'intersection avec les précédentes. Ainsi d_2 rencontre deux régions, d_3 trois régions, d_4 quatre et d_5 cinq. Chaque région traversée est coupée en deux nouvelles régions et ajoute donc une région au total. Comme d_1 détermine deux régions, il y a en tout $2 + 2 + 3 + 4 + 5 = 17$ régions.

corrigé 14 En partant de la finale, qui comporte un match, le tour précédent en comporte 2, le précédent 2×2, etc jusqu'au premier tour, qui en comporte donc $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$ matches. Il y a donc en tout

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$$

matches joués. On peut éviter l'addition précédente en remarquant que $2 \times 64 = 128$ joueurs sont engagés dans le tournoi. À chacun des joueurs distincts du vainqueur du tournoi, on peut associer l'unique match qu'il a perdu, et l'on obtient ainsi tous les matches, au total $128 - 1 = 127$.

corrigé 15 À chacune des 5 régions on a le choix de 3 couleurs. Comme ces choix sont indépendants d'une région à l'autre, il y a $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$ dessins possibles.

corrigé 16

1. La situation est identique au dénombrement des poignées de main, et il y a $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ choix possibles.
2. Il faut ajouter au comptage précédent les choix qui ne comportent qu'un seul parfum. Il y a donc $15 + 6 = 21$ choix possibles.