Année 2007/2008 N. Cheze, C. Ludena, P. Soulier

UNIVERSITÉ PARIS X NANTERRE
LICENCE SCIENCES ÉCONOMIQUES et GESTION PREMIÈRE ANNÉE
Eléments de correction du contrôle de Mathématiques 2

Durée : 2 Heures. Jeudi 10 avril 2008

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1. Soient les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$,

et l'ensemble $E = Vect\,(u_1, u_2, u_3)$.

a - Montrer, sans calcul, que ces vecteurs sont liés.

> Dans $\mathbb{R}^3$, il y a au plus trois vecteurs libres donc (u_1, u_2, u_3, u_4)sont nécessairement liés.

b - Exprimer u_3 en fonction de u_1 et u_2.

> $u_3 = 3u_1 - 2u_2$

c - Quelle est la dimension de E ?

> $dimE \leq 3$ et comme (u_1, u_2, u_3) forme une famille liée (question précédente) alors $dimE \leq 2$. De plus, u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires donc $dimE = 2$.

d - Donner l'équation de E.

> Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E$ donc $X = \alpha u_1 + \beta u_2$. D'où le système :
>
> $$\begin{cases} 2\alpha & - & \beta & = & x \\ 2\alpha & + & 6\beta & = & y \\ \alpha & + & 2\beta & = & z \end{cases}$$
>
> D'où $x + \frac{5}{2}y - 7z = 0$ Donc l'équation du plan E est donnée par
>
> $$E = ((x, y) \in R^2 / x + \frac{5}{2}y - 7z = 0)$$

e - Montrer que $u_4 \notin E$.

> $1 + \frac{5}{2}\,9 - 35 \neq 0$

En déduire que u_1, u_2, u_4 forment une base de $\mathbb{R}^3$.

> Comme $u_4 \notin E$, la famille (u_1, u_2, u_4) est libre donc forme une base de $\mathbb{R}^3$.

f - Quelles sont les bases de $\mathbb{R}^3$ formées de vecteurs de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) ?

> Ce sont toutes les familles composées de trois vecteurs libres issues de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) donc (u_1, u_2, u_4) , (u_1, u_3, u_4) , (u_2, u_3, u_4) .

Exercice 2. Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ et le vecteur $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a - Montrer que les colonnes A_1, A_2, A_3 de A forment une base de $\mathbb{R}^3$.

On remarque que $A_1 = u_1$, $A_2 = u_2$,$A_3 = u_4$ (exercice 1) et d'après la question e) de l'exercice 1, on peut dire que les colonnes A_1, A_2, A_3 de A forment une base de $\mathbb{R}^3$.

b - Calculer AY. En déduire A^2Y puis $A^{-1}Y$.

$AY = Y$ donc $A^2Y = Y$ et comme A est inversible d'après la question a), $A^{-1}Y = A^{-1}AY = Y$

c - Résoudre, sans calcul, l'équation $AX = Y$.

$AX = Y$ donc comme A est inversible d'après la question a), $X = A^{-1}Y = Y$

d - Inverser A par la méthode de la matrice témoin.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1)/2 \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & 9/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2)-2(1) \\ (3)-(1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8/7 & -1/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & 5/2 & 9/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2)/7 \\ (3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8/7 & -1/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 23/14 & -1/7 & -5/14 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3)-5/2(2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8/7 & -1/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/23 & -5/23 & 14/23 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ 14/23(3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 25/46 & 5/46 & -7/23 \\ 0 & 1 & 0 & -1/23 & 9/23 & -16/23 \\ 0 & 0 & 1 & -2/23 & -5/23 & 14/23 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1)-1/2(3) \\ (2)-8/7(3) \\ (3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 12/23 & 7/23 & -15/23 \\ 0 & 1 & 0 & -1/23 & 9/23 & -16/23 \\ 0 & 0 & 1 & -2/23 & -5/23 & 14/23 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1)+1/2(2) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

e - Soit $B = A - I_3$. Calculer BY. B est-elle inversible ?

$BY = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si B est inversible alors $Y = B^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui est faux donc B est non inversible.

Exercice 3. Soit le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & 8z & = & 0 \quad (L_1)\\ 2x & + & 6y & - & 6z & = & 0 \quad (L_2)\\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \quad (L_3)\end{array}\right.$$

a - Mettre le système sous la forme matricielle $AX = 0$.

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 2 & 6 & -6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et le vecteur } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

b - Résoudre ce système par la méthode du pivot de Gauss en explicitant les transformations faites sur les lignes L_1, L_2, L_3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 8 & 0 \\ 2 & 6 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1)/2 \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & -14 & 0 \\ 0 & 5/2 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2)-2(1) \\ (3)-(1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5/2 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2)/7 \\ (3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3)-5/2(2) \end{array}$$

Il y a donc une infinité de solutions de la forme $(-3z, 2z, z), z \in \mathbb{R}$

Remarque : On peut remarquer que les colonnes de A correspondent à (u_1, u_2, u_3) de l'exercice 1 et d'après la question b) de l'exercice 1, ces vecteurs sont liés donc il y a nécessairement une infinité de solutions pour le système.

Exercice 4. Soient les sous-espaces vectoriels :

$$F = \{(a,\ 2b,\ b-a) \in \mathbb{R}^3/\ a,\ b \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad G = \{(c,\ c+d,\ d) \in \mathbb{R}^3/\ c,\ d \in \mathbb{R}\}.$$

a - Donner une base et l'équation de chacun d'eux.

$F=\{(a,\ 2b,\ b-a)\in\mathbb{R}^3/\ a,\ b\in\mathbb{R}\}=\{a\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\ a,\ b\in\mathbb{R}\ \}$

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in F$ donc $X=a\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$. D'où le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a & & & = & x\\ & & 2b & = & y\\ -a & + & b & = & z\end{array}\right.$$

D'où $x-\dfrac{y}{2}+z=0$ Donc l'équation du plan F est donnée par

$$F=((x,y)\in R^2/x-\frac{y}{2}+z=0)$$

$G=\{(c,\ c+d,\ d)\in\mathbb{R}^3/\ c,\ d\in\mathbb{R}\}=\{c\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ c,\ d\in\mathbb{R}\ \}$

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in G$ donc $X=c\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. D'où le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} c & & & = & x\\ c & + & d & = & y\\ & & d & = & z\end{array}\right.$$

D'où $x-y+z=0$ Donc l'équation du plan G est donnée par

$$G=((x,y)\in R^2/x-y+z=0)$$

b - Déterminer une base de $F\cap G$.

$F\cap G$ est de dimension 1 donc toute base de $F\cap G$ est composée d'un vecteur satisfaisant les deux équations précédentes. On peut choisir par exemple $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$