L3 de GESTION Apprentissage — Université de Paris X Nanterre

R. Réveillé — année 2008-2009

STATISTIQUES

Contrôle n° 2 • Vendredi 21 Novembre

Faire les calculs avec 4 décimales ; Enoncer les résultats dans une phrase de conclusion, arrondis à 1 décimale

Un confiseur industriel prépare les Fêtes de Noël. L'un de ses articles est un petit bonbon chocolaté qu'il propose en sachets de 350g (poids net affiché). Bien sûr, le poids réel X varie d'un sachet à l'autre. Un poids inférieur au poids affiché rend le confiseur passible d'une amende de la DGCCRF (Direction Générale de la Concurrence, de la Consommation…), alors qu'un poids trop élevé est pour lui une perte inutile. Un bon compromis consiste, pour lui, à produire des sachets dont le poids réel fluctue autour d'un poids moyen de 365g avec un écart-type de 6g. Ce poids réel est distribué (sensiblement) normalement.

A. **1-** Quelle est la population étudiée ?
Quelle est la variable observée ? Préciser -si elle est connue- sa loi et ses paramètres.
2- Quelle est la proportion de sachets dont le poids est inférieur à 350g ?
Calculer la probabilité qu'un sachet produit pèse plus de 370g ?
Quel est le poids maximum pour 80 % des sachets?
Quel est le poids qui est dépassé dans 4% des cas ?
3- Quel est l'intervalle de variation contenant 92% des poids les plus fréquents ?
Les 2 zones extérieures à cet intervalle correspondent-elles à des risques de même nature ? Caractériser ce(s) risque(s).

B. Pour assurer un conditionnement conforme à sa règle, il pèse régulièrement 16 sachets pris aléatoirement.
1- Déterminer l'intervalle à risques symétriques dans lequel se trouve -avec la probabilité 0.92- le poids moyen de 16 sachets. (*Préciser soigneusement la variable aléatoire concernée par cette question, sa loi et ses paramètres*)
2- Aujourd'hui l'échantillon donne les résultats suivants : $\sum_{i=1 \text{ à } 16} x_i = 5\,800 \qquad \sum_{i=1 \text{ à } 16} x_i^2 = 2\,103\,000$
Calculer la moyenne et l'écart-type des poids observés dans l'échantillon.
Comparer au résultat précédent, commenter.
3- Donner une estimation de la moyenne μ des poids des sachets-en-cours-de-production-aujourd'hui.
Pour caractériser leur dispersion, quelle valeur numérique proposez-vous pour estimer au mieux l'écart-type de ces poids? (*Donner ces 2 réponses avec 2 décimales*)

C. Un de ses collaborateurs suggère au Directeur de surveiller la conformité du conditionnement par un test :

Test T $\quad H_0 : \mu = 365 \quad$ contre $\quad H_1 : \mu = 350$

Il vous charge de cette mission avec les instructions suivantes : accepter un risque α de 4% , utiliser des échantillons de la taille habituelle n= 16, conserver un écart-type de 6g . Enfin, si μ ne vaut plus 365g, interrompre le conditionnement en cours pour procéder aux rectifications nécessaires.

1- Sous l'hypothèse H_1 , quelle est la proportion de sachets passibles d'amende ?(*Justifier sans calcul*)
Définir et énoncer en clair les risques de 1ère et 2de espèce. Lequel est contrôlé par le test proposé?
2- Construire le test : préciser la variable aléatoire à utiliser, sa loi sous l'hypothèse H_0 ;
Définir la région critique et la représenter par un schéma. ;
Calculer la valeur critique K, énoncer la règle de décision ;
Calculer le risque de seconde espèce ;
Donner la définition de la puissance du test, sa valeur et sa signification en clair.
4- Sur l'échantillon de taille 16 observé après construction du test, le poids moyen observé est de 361g
Selon ce test, quelle conclusion annoncez-vous? Quelle est la valeur du risque attaché à cette décision?
5- Sans refaire toute la construction, dire par analogie quelle serait la valeur critique K' du test suivant :

Test T' $\quad H_0 : \mu = 350 \quad$ contre $\quad H_1 : \mu = 365 \quad (\alpha = 4\%)$

(*Une ligne de justification et un calcul simple suffisent*)
Quel serait alors en clair le risque contrôlé ? Quelle serait la puissance du test (signification, valeur)
Quelle serait la règle de décision ? La conclusion ? Pour comparer **T** et **T'**, qualifier chacun d'un adjectif.
6- (En justifiant très brièvement) Indiquer la valeur critique, la règle de décision de ce 3ème test :

Test T'' $\quad H_0 : \mu = 365 \quad$ contre $\quad H_1 : \mu > 365 \quad (\alpha = 4\%)$

et la région d'acceptation du 4ème :

Test T''' $\quad H_0 : \mu = 365 \quad$ contre $\quad H_1 : \mu \neq 365 \quad (\alpha = 8\%)$

A- **1.** Population = les sachets de bonbons chocolatés;
Variable aléatoire X observée sur les individus de la population = « poids réel du sachet».
Sa loi : Loi Normale (sensiblement), espérance mathématique $\mu = 365$ écart-type $\sigma = 6$: $X \sim N(365 ; 6)$
$\Leftrightarrow \frac{X-365}{6} \sim N(0 ;1)$

2. Cette question demande de calculer $P(X<350)$;
$\mathbf{P(}X<350 / X\sim N(365 ; 6)\mathbf{)} = \mathbf{P(}\frac{X-365}{6} < \frac{350-365}{6} / \frac{X-365}{6} \sim N(0 ;1)\mathbf{)} = P(Z <-2.5) = = P(Z >2.5) = 1-P(Z <2.5)$
$=1-0.9938=0.0062$ ➔ 0.6% des sachets pèsent moins de 350 grammes.
$P(X>370 / X\sim N(365 ; 6)) = P(\frac{X-365}{6} > \frac{370-365}{6}) = P(Z >0.83) = 1-P(Z <0.83) =1-0.7967=0.2033$
➔ Il y a 20% de chance de tomber sur un sachet pesant plus de 370 g.

Les questions suivantes demandent de chercher des quantiles :
$q_{0.80}(X) = \mu + z_{0.80} \times \sigma = 365 + 0.84 \times 6 = 370.04$ (où $z_{0.80}$ est le quantile de Z correspondant à la probabilité 0.80)
➔ 80% des sachets pèsent moins de 370.0 g

Le poids dépassé dans 4% des cas est le poids maximum pour 96% des sachets
$q_{0.96}(X) = \mu + z_{0.96} \times \sigma = 365 + 1.75 \times 6 = 375.50$ 96% des sachets pèsent moins de 375.5 g
$\Leftrightarrow$ 4% des sachets pèsent plus de 375.5 g

$I_{0.92}(X) = (q_{0.04}(X) ; q_{0.96}(X)) = (\mu - z_{0.96} \times \sigma ; \mu + z_{0.96} \times \sigma) = (365 - 1.75\times 6$; *déjà calculé*$) = (354.5 ; 375.5)$
➔ 92% des poids les plus fréquents sont compris entre 354.5 et 375.5 grammes
ou: Le poids d'un sachet choisi au hasard a 92% de chances d'être compris entre 354.5 et 375.5 g.

A l'extérieur de cet intervalle, les 2 zones ne correspondent pas aux mêmes risques:
- à gauche on trouve des poids faibles dont certains, inférieurs à 350g, sont passibles d'amende ;
- à droite, des poids lourds représentant pour le confiseur une perte de marchandise.

B- **1.** Cette question concerne la variable $\overline{X}_n$ (*ici n=16*) dont la moyenne est celle de X ;
son écart-type est celui de X divisé par $\sqrt{n}$ (*soit ici* $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{16}}$ *=1.5*) ;
X suivant une loi normale, $\overline{X}_n$ suit une loi Normale (qqsoit la taille de l'échantillon) : $\overline{X}_{16} \sim N(365 ; 1.5)$
$I_{0.92}(\overline{X}_{16}) = (q_{0.04}(\overline{X}_{16}) ; q_{0.96}(\overline{X}_{16})) = (\mu - z_{0.96} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \mu + z_{0.96} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (365 - 1.75\times 1.5 ; 365 + 1.75\times 1.5)$
Cet intervalle a pour bornes :

$$\mu \pm z_{0.96} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 365 \pm 1.75\times 1.5 \quad \text{soit } 362.38 \text{ et } 367.63 \Rightarrow I_{0.92}(\overline{X}_{16}) = (362.38 ; 367.63)$$

La moyenne des poids de 16 sachets choisis au hasard a 92% de chances d'être comprise entre 362.38 et 367.63 g.

2. Moyenne de l'échantillon : $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{5\,800}{16} = 362.5$
Elle est intérieure à l'intervalle de variation précédent $I_{0.92}(\overline{X}_{16})$: rien de surprenant, il en contient 92%.

Ecart-type dans l'échantillon: $s = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)}{n} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{2103000}{16} - 362.5^2} = \sqrt{31.25} = 5.59$
Il est inférieur à $\sigma = 6$: rien de surprenant non plus, résultat fréquent pour les échantillons.

3. Le poids moyen μ des sachets produits aujourd'hui peut-être estimé à 362.5 grammes (moyenne $\overline{x}$ observée sur l'échantillon de taille 16).
Pour avoir une bonne estimation de l'écart-type σ caractérisant la dispersion des poids des sachets aujourd'hui, il faut corriger l'écart-type de l'échantillon, qui ne donne qu'une estimation biaisée :

$s^* = s \times \sqrt{\frac{n}{n-1}} = 5.59 \times \sqrt{\frac{16}{15}} = 5.77$ ⇨ $s^* = 5.77$ est une estimation de σ par un estimateur sans biais

C. **1.** Sous H_1 $\overline{X}_{16} \sim N(350\ ;\ 1.5)$: La distribution (symétrique) est donc centrée sur 350 , donc $P(X<350) = 0.5$
Si H_1 est vraie, 50% des sachets sont passibles d'amende .

α = risque de 1ère espèce = P(décider H_1 /H_0 vrai)
α = Proba de décider « $\mu = 350$ » alors que « $\mu = 365$ »
α = risque de croire 50% des sachets passibles d'amende, alors que seulement 0.6% (d'après A2).
α = risque d'interrompre pour une vérification qui est inutile.

β = risque de 2de espèce = P(décider H_0 /H_1 vrai)
β = Proba de décider « $\mu = 365$ » alors que « $\mu = 350$ »
β = risque de penser « production conforme » alors que trop de sachets (50%) sont passibles d'amende.
β = risque de poursuivre un conditionnement défectueux.

Dans tout test le risque contrôlé est α :
Avec ce test, on contrôle le risque d'interrompre le conditionnement pour une vérification qui est inutile.

2. **Test T** $H_0 : \mu = 365$ contre $H_1 : \mu = 350$ $(\alpha = 0.04)$

● Le test consistera à observer un bon estimateur du paramètre μ concerné par les hypothèses : $\overline{X}_{16}$.
D'après B1 : $\overline{X}_{16} \sim N(\mu\ ;\ 1.5)$. Donc, sous H_0 $\overline{X}_{16} \sim N(365\ ;\ 1.5)$

● La région critique (région de rejet de H_0) est caractérisée par *une condition sur cette variable, condition correspondant aux situations de rejet de H_0* :
μ_1 étant inférieur à μ_0, la condition est $\overline{X}_{16} \le K$
(où K est inférieur à $\mu_0 = 365$)
(μ_0 *est la valeur de* μ *sous l'hypothèse* H_0 *,* μ_1 *=valeur sous* H_1)

350	K	365	
μ_1		μ_0	$\overline{X}_{16}$
<- - - - rejeter H_0- - - - - |		accepter H_0	

● *Cette valeur critique K est déterminée numériquement en fonction de la valeur de α = P(décider H_1 /H_0 vrai): ce risque est représenté graphiquement par l'aire grisée sous la courbe représentant la répartition de* $\overline{X}_{16}$ *dans le cas où l'hypothèse H_0 est vraie (attention : l'axe de symétrie vertical de cette courbe a pour abscisse μ_0 c'est-à-dire 365)*

$\alpha = 0{,}04 = P(\text{décider } H_1 / H_0 \text{ vrai}) = P(\overline{X}_{16} \le K\ /\ \overline{X}_{16}$ suit app. $N(365\ ;\ 1.5))$ Distrib de $\overline{X}$ sous H_0

$0{,}04 = P\left(\frac{\overline{X}_{16}-365}{1.5} \le \frac{K-365}{1.5}\ /\ \frac{\overline{X}_{16}-365}{1.5}\right)$ suit $N(0\ ;1)$) $\approx P(Z \le k)$

où $k = \frac{K-365}{1.5} \approx -1{,}75$ d'après la table de la loi Normale,

d'où $K = 365 - 1{,}75 \times 1.5 = 365 - 2.63 = 362.38$

4% |		$\overline{X}_{16}$
350	K	365

● La décision sera prise à partir de la valeur numérique $\overline{x}$ observée pour $\overline{X}_{16}$ et la règle de décision est :
Si $\overline{x} \le 362.38$ (RC) on rejettera H_0 (au risque α de faire erreur)
Si $\overline{x} > 362.38$ (RA) on acceptera H_0 (au risque β de faire erreur)

● $\beta = P(\text{décider } H_0 / H_1 \text{ vrai}) = P(\overline{X}_{16} > K\ /\ \overline{X}_{16}$ suit app. $N(350\ ;\ 1.5)$)

$\beta = P\left(\frac{\overline{X}_{16}-350}{1.5} > \frac{362.38-350}{1.5}\ /\ \frac{\overline{X}_{16}-350}{1.5}\right.$ suit app. $N(0\ ;1)$)$\approx P(Z>8.25) = 1-P(Z<8.25) \approx 1-1=0$
Le risque de 2de espèce β est (app.) nul.

● La puissance du test : $\eta = 1-\beta = P(\text{décider } H_1 / H_1 \text{ vrai}) \approx 1$ → $\eta \approx 100\%$
η = Proba de décider « $\mu = 350$ » alors que « $\mu = 350$ » =Capacité d'interrompre le conditionnement qd nécessaire.

Le test construit est capable -dans 100 % des cas- de rejeter l'hypothèse privilégiée H_0 quand elle est fausse : il est capable de reconnaître -dans 100% des cas- la nécessité d'interrompre le conditionnement.

4. Le poids moyen observé sur l'échantillon se trouve dans la région critique de l'hypothèse H_0 « $\mu = 365$ » car $\overline{x} = 361$ est inférieur à la valeur critique K=362.38.

Le test indique donc qu'il faut rejeter H_0, donc interrompre le conditionnement pour rectifier.
Mais nous risquons de rejeter H_0 à tort : ce risque (α) est de 4%

5. T' : on a échangé les contenus de H_0 et H_1 ; On se rappelle que pour les tests de moyenne, la figure illustrant T'est symétrique de celle de T par rapport à une verticale passant par le milieu du segment [350 ; 365].

Le risque α contrôlé cette fois est l'ancien β de T : risque de poursuivre un conditionnement défectueux.
La puissance du Test est cette fois : la capacité à reconnaître l'inutilité d'interrompre le conditionnement.

Si $\mu = 365$ la loi de $\overline{X}_{16}$ est N(365;1.5) : L'écart-type est inchangé ; or, deux distributions normales de même écart-type étant superposables, le graphique de T' est symétrique de celui de T par rapport au milieu de l'intervalle [350 ; 365] qui est 357,5.
La valeur de α étant inchangée, les valeurs critiques K et K' sont également symétriques, et la puissance du test T'a donc la même valeur que pour T.
Valeur critique K' : on ajoute à 350 ce qu'on avait retranché à 365 pour obtenir K (soit 350+2.63= 352.63)

$\rightarrow$ K' = 352.63 $\rightarrow$ rejet de H_0 $\rightarrow$ décision $\mu = 365 \rightarrow$ on continue le conditionnement

Distrib de $\overline{X}$ sous H_0 | Distrib de $\overline{X}$ sous H_0

4% $\overline{X}_{16}$

350 K'

μ_0 352.63 μ_1

|- - - - -**RC**- - - - - ->

Interrompre |

4% $\overline{X}_{16}$

K **365**

μ_1 362.38 μ_0

< - - - - - **RC**- - - -|

Interrompre |

T' est optimiste (il interromp moins souvent que **T**) **T** prudent, pessimiste

En effet : pour un $\overline{x}$ compris entre 352.63 et 362.38 , le test **T'** autorise à poursuivre le conditionnement tel qu'il se déroule, alors que **T** recommande d'interrompre.

6. La figure du test T'' est symétrique de celle de T, mais par rapport à une verticale passant par 365

T''

Distrib de $\overline{X}$ sous H_0

4% $\overline{X}_{16}$

365 K''

μ_0 367.63 μ_1

|- - - - -**RC**- - - - - ->

K'' = 365 + 2.63

T'''

Distrib de $\overline{X}$ sous H_0

4% 4% $\overline{X}_{16}$

K_G **365** K_D

μ_1 362.38 μ_0 367.63

< - - - - - **RC**- - - -| RA |- - - -**RC** - - - ->

$K_G = K$ $K_D = K''$

T''	**T'''**
$\overline{x}$ dans RC ➔ interrompre (car perte trop importante de marchandise)	$\overline{x}$ dans RC ➔ interrompre (car perte trop importante de marchandise, ds le cas $\overline{x} \leq K_G$) (car trop de sachets passibles d'amende, dans le cas $\overline{x} \geq K_D$)

●●●●●●●●●●●●●●●

Commentaire Général:

Le test **T**, *proposé au confiseur par son collaborateur, n'est pas forcément le meilleur, malgré la valeur de sa puissance η qui est maximum.*
Le test **T'** *n'est pas adapté à l'objectif du confiseur, car l'hypothèse privilégiée en est « $H_0 : \mu = 350$ » sous laquelle 50% des sachets produits ont un poids inférieur à 350.*
Le test **T''** *a un inconvénient : lequel ?*