Problèmes d'ordonnancement à contraintes linéaires

Claire Hanen, Alix Munier

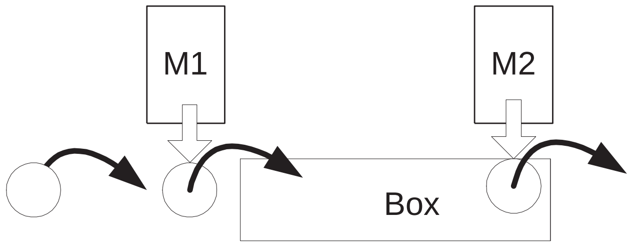
Contraintes de précédence linéaire

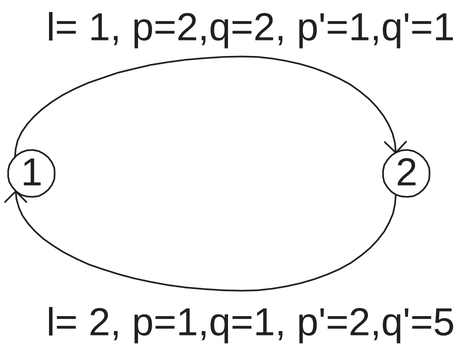
- Multi-graphe G, sommets= tâches génériques, arcs = précédences linéaires
- un arc a d'origine $b(a) = i$ et d'extrémité $e(a) = j$ porte 5 valeurs entières $l_a \geq 1$ (durée de i), $p_a, p'_a \geq 1$, $q_a, q'_a \in \mathbb{Z}$.
- un arc induit une infinité de contraintes de précédence:

$$\forall k \geq 0, \quad < i, p_a k + q_a > \quad précede \quad < j, p'_a k + q'_a >$$

Un exemple

Considérons le processus où la machine 2 assemble deux objets produits par la machine 1. La boite est de taille 4.





Graphe développé $\mathcal{G}$

- Sommets=$\{< i, k >, i \in \mathcal{T}\}$
- un sommet $(0, 0)$ relié à tous les sommets $< i, 1 >$ valué 0
- A toute contrainte linéaire a avec $b(a) = i, e(a) = j$ correspond une infinité d'arcs de longueur l_a :

$$\forall k \geq 0, (< i, p_a k + a_q >, < j, p'ak + q'a >)$$

- Un ordonnancement est un potentiel sur le graphe développé
- Il existe un ordonnancement si et seulement si le graphe développé est sans circuit

Poids

- le poids d'un arc a est défini comme suit:

$$\Pi(a) = \frac{p'_a}{p_a}$$

- Remarque: dans un graphe uniforme tous les arcs sont de poids 1.
- Le poids d'un chemin μ est le produit du poids de ses arcs

Une condition nécessaire

Theorème 1. *Pour qu'il existe un ordonnancement, il faut que tous les circuits de G soient de poids supérieur ou égal à 1. Cette condition n'est pas suffisante*

- Lorsqu'il existe un circuit c de poids < 1, d'arcs $a_1, \ldots, a_r$, en prenant $k_1 = \lambda.p_{a_1} \ldots p_{a_r}$ et λ assez grand, on a un circuit du graphe développé issu de $< b(a_1), p_{a_1} k_1 + q_{a_1} >$:
- On définit $k_x = \lambda.p'_{a_1} \ldots p'_{a_{x-1}}.p_{a_{x+1}} \ldots p_{a_r}.p_{a_1}$ alors $< e(a_{x-1}), p'_{a_{x-1}} k_{x-1} + q'_{a_{x-1}} >$ précède ou est égal à $< b(a_x), p_{a_x} k_x + q'_{a_x} >$ (puisque $e(a_{x-1}) = b(a_x)$). D'où un circuit dans le graphe développé.
- Lorsque G est uniforme, la condition est toujours satisfaite. Or, il n'existe pas toujours d'ordonnancement

Changement de granularité

- Etant donné un graphe linéaire G, et une tâche générique i, on opère un changement d'unité en considérant comme tâches génériques à répéter les n_i premières occurences de la tâche i.
- Ainsi, on a les tâches génériques $i^1, \ldots, i^{n_i}$, qui sont liées entre elles par les contraintes liées à la non réentrance: $\forall k \geq 1$, $< i^r, k >$ précède $< i^{r+1}, k >$ et $i^{n_i}, k >$ précède $< i^1, k+1 >$
- Remarque: ce sont des contraintes uniformes.
- La tâche $< i^r, k >$, correspond à la tâche $< i, n_i(k-1) + r >$ dans le système de tâche initial.
- Réciproquement, la tâche $< i, k >$ correspond à $< i^y, x >$ où $y = 1 + (k-1) \mod n_i$ et $x = 1 + \left\lfloor \dfrac{(k-1)}{n_i} \right\rfloor$

Expansion d'une contrainte linéaire

- Considérons une contrainte linéaire a avec $i = b(a), j = e(a)$.
- Supposons
$$\frac{n_i}{p_a} = \frac{n_j}{p'_a} = s \in \mathbb{N}$$
- Soit k tel que $k \mod s = r, k = \lambda s + r$
- alors $< i, p_a k + q_a >$ correspond à $< i^y, x >$ où $y = 1 + (p_a r + q_a - 1) \mod n_i$ et $x = 1 + \lambda + \left\lfloor \frac{(p_a r + q_a - 1)}{n_i} \right\rfloor$
- De même $< j, p'_a k + q'_a >$ correspond à $< j^{y'}, x' >$ où $y' = 1 + (p'_a r + q'_a - 1) \mod n_j$ et $x' = 1 + \lambda + \left\lfloor \frac{(p'_a r + q'_a - 1)}{n_j} \right\rfloor$
- On voit que y, y' ne dépendent que de r, et x, x' que de λ et r.
- De plus $x' - x$ ne dépend que de r (et pas de λ)

Expansion uniforme

Theorème 2. *Si une contrainte linéaire* a *avec* $i = b(a)$*,* $j = e(a)$ *voit ses extrémités expansées en* n_i *et* n_j *exemplaires avec*

$$\frac{n_i}{p_a} = \frac{n_j}{p'_a} = s \in I\!N$$

alors la contrainte a *est équivalente à* s *contraintes uniformes.*

- En posant $x_r = 1 + \left\lfloor \frac{(p_a r + q_a - 1)}{n_i} \right\rfloor$, $y_r = 1 + (p_a r + q_a - 1) \mod n_i$
- En posant $x'_r = 1 + \left\lfloor \frac{(p'_a r + q'_a - 1)}{n_j} \right\rfloor$, $y'_r = 1 + (p'_a r + q'_a - 1) \mod n_j$
- On a pour tout r une contrainte uniforme entre i^{y_r} et $j^{y'_r}$ avec comme hauteur $x' - x$.
- Idée: Utiliser cette propriété pour ramener l'étude d'un graphe linéaire à un graphe uniforme

Graphe unitaire

Définition 1. *Un graphe linéaire est dit unitaire s'il est fortement connexe et si ses circuits sont tous de poids* 1.

Theorème 3. *Si* G *est unitaire alors le système d'équations:*

$$\forall a \in A, \frac{n_i}{n_j} = \pi_a$$

admet des solutions entières.

Theorème 4. *Si* G *est unitaire, il existe un vecteur* $(N_1, \ldots, N_n)$ *tel que l'ensemble les solutions du système est de la forme:*

$$(n_1, \ldots, n_n) = \lambda(N_1, \ldots, N_n), \lambda \in I\!N$$

Ordonnancement d'un graphe unitaire

Theorème 5. *Si G est unitaire, il existe un vecteur $(N_1, \ldots, N_n)$ tel que l'expansion des tâches selon ce vecteur permette de définir un graphe uniforme G' équivalent. Le graphe expansé a une taille qui peut être exponentielle par rapport à la taille du graphe initial.*

Exercice: construire le graphe uniforme équivalent au graphe linéaire présenté (ou à un autre)

onnancement périodique d’un graphe uni

Définition 2. *Soit $G = (\mathcal{T}, A)$ graphe unitaire. un ordonnancement σ est dit périodique à périodes individuelles s’il existe deux vecteurs de rationnels positifs $w = (w_1, \ldots, w_n)$ et $t = (t_1, \ldots, t_n)$ tels que:*

$$\forall k \geq 1, t^\sigma(< i, k >) = t_i + (k-1)w_i$$

On notera $\sigma = (t, w)$.

Lemme 1. *Un tel ordonnancement $\sigma = (t, w)$ est réalisable ssi $\forall a \in A$,*

$$\forall k \geq 0, t_{e(a)} - t_{b(a)} \geq l_a + (w_{b(a)}p_a - w_{e(a)}p'_a)k + w_{b(a)}(q_a - 1) - w_{e(a)}(q'_a - 1)$$

Un programme linéaire

Theorème 6. *L'ordonnancement périodique à période individuelles de temps de cycle moyen minimal est solution du programme linéaire suivant:*

$$\left\{\begin{array}{ll} & Min\,B \\ \forall\, a \in A, & w_{b(a)}p_a - w_{e(a)}p'_a \leq 0 \\ & t_{e(a)} - t_{b(a)} \geq l_a + w_{b(a)}(q_a - 1) - w_{e(a)}(q'_a - 1) \\ \forall i \in \mathcal{T}, & l_i \leq w_i \leq B \\ \forall i \in \mathcal{T}, & 0 \leq t_i \end{array}\right. \tag{1}$$

Propriétés des périodes

Lemme 2. *Si G is unitaire, alors tout ordonnancement périodique à périodes individuelles vérifie:*

$$\forall a \in A \frac{w_{b(a)}}{w_{e(a)}} = \pi_a$$

- En conséquence, $(\frac{1}{w_1}, \ldots, \frac{1}{w_n})$ est solution du système de l'expansion.
- On en déduit que toutes les solutions de ce système ont pour forme

$$\lambda(W_1, \ldots, W_n), \quad \lambda \in I\!R, \; avec \, W_i = \frac{1}{N_i}$$

Construction d'un ordo périodique

Définition 3. *On appelle hauteur h_a d'un arc $a \in A$ la valeur: $h_a = W_{e(a)}(q'_a - 1) - W_{b(a)}(q_a - 1)$*

Theorème 7. *Si G is unitaire, il existe un ordonnancement périodique si et seulement si G ne possède pas de circuit de hauteur négative ou nulle*

Theorème 8. *Si G is unitaire, un ordonnancement périodique de périodes $\lambda(W_1, \ldots, W_n)$ définit un potentiel sur le graphe G muni de la valuation $L - \lambda H$. La valeur minimale de λ est celle du circuit critique de G:*

$$\alpha(G) = \max_{c\ circuit\ de\ G} \frac{L(c)}{H(c)}$$

Questions

- Existe-t-il des graphes pour lesquels il n'existe pas d'ordonnancement périodique, mais un ordo non périodique existe? OUI
- Comment déterminer une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un ordonnnancement?
- Peut-on étendre cette analyse au cas des graphes non unitaires? OUI, partiellement: analyse et expansion des composantes unitaires d'un graphe pour trouver le comportement de l'ordonnancement au plus tôt, construction d'un ordonnancementpériodique à partir d'un certain rang