MASTER IAD
Examen d'Ordonnancement en Informatique- partie cyclique + communications
31 Mars 2005

Exercice 1 ordonnancement périodique

On considère donc un ensemble T de n tâches de durées $p_1, \ldots, p_n$, et un graphe orienté $G = (T, A)$ muni de deux fonctions de valuation des arcs L et H. On supposera les tâches non réentrantes, c'est à dire implicitement la présence de boucles autour de chaque sommet i, de sorte que $L(i,i) = p_i$, $H(i,i) = 1$.

1 Calculer un ordonnancement périodique de période minimale pour le graphe présenté dans la figure.

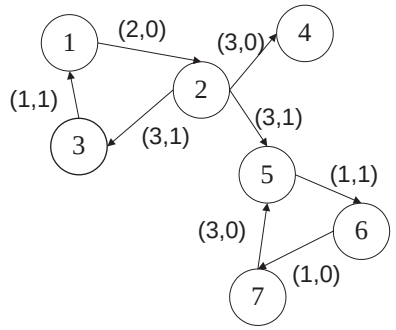

Figure 1 Un graphe uniforme

Dans cet exemple, les durées des tâches sont les suivantes : $p_1 = 2, p_2 = p_7 = 3$, toutes les autres tâches ont une durée égale à 1.

Exercice 2 Problème cyclique avec délais de communication

Dans cet exercice, on se donne un ensemble de tâches de durées 1, soumises à un ensemble de contraintes uniformes données par un graphe G muni d'une valuation H à valeurs dans $\mathbb{N}$ (n.b. comme les durées sont égales à 1, les longueurs des arcs sont toutes égales à 1).

On suppose que ces tâches doivent être répétées une infinité de fois, sous l'hypothèse $UET-UCT$: les arcs du graphe développé correspondent à des transferts de données entre les tâches. Ces transferts sont immédiats lorsque les tâches sont affectés à la même machine, et prennent une durée 1 sinon. On suppose le nombre de machines illimité.

Un ordonnancement σ définit pour chaque tâche i et pour chaque occurence $k \geq 1$ de cette tâche :

- Une date de début d'éxécution notée $t^\sigma(< i, k >)$;
- une machine notée $M^\sigma(< i, k >)$.

De sorte que :

- chaque machine n'exécute qu'une tâche à la fois ;
- si (i, j) est un arc de G, alors pour tout entier $k \geq 0$:

$$\begin{cases} t^\sigma(< i,k >) + 1 \leq t^\sigma(< j, k + H(i,j) >) & si \quad M^\sigma(< i,k >) = M^\sigma(< j, k + H(i,j) >) \\ t^\sigma(< i,k >) + 2 \leq t^\sigma(< j, k + H(i,j) >) & sinon \end{cases}$$

1 Montrer qu'il existe un ordonnancement si et seulement si le graphe G ne comporte pas de circuit de hauteur nulle.

On s'intéresse dans la suite à la construction d'ordonnancements périodiques, c'est à dire pour lesquels il existe w^σ, de sorte que pour toute tâche i, $t^\sigma(< i, k >) = t_i^\sigma + (k-1)w^\sigma$.

2 Soit Λ un graphe sans circuit. Considérons le graphe Λ' construit à partir de Λ en ajoutant deux sommets source, s, s' et deux sommets puits t, t' de sorte que pour chaque sommet de Λ sans prédecesseur i (resp. sans successeur), on ajoute les arcs (s, i) et (s', i) (resp (i, t) et (i, t')).

Etablir la relation existant entre les ordonnancements UET-UCT non cycliques (chaque tâche est faite une fois) de Λ' et ceux de Λ.

3 Soit Λ un graphe sans circuit. Définissons le graphe (G, H) construit en ajoutant à Λ' des arcs de t, t' vers s, s' de hauteur 1, les autres arcs étant affectés d'une hauteur nulle. Etablir une relation existant entre les ordonnancements périodiques UET-UCT de G et les ordonnancements UET-UCT de Λ'.

4 En déduire que la recherche d'un ordonnancement périodique de période minimale pour un graphe quelconque sous l'hypothèse UET-UCT est NP-difficile.

Soit σ un ordonnancement périodique, et (i, j) un arc de G.

5 Montrer que si pour une valeur p, $t^\sigma(< i, p >) + 1 = t^\sigma(< j, p + H(i, j) >)$, alors pour tout $k \geq 0$, $t^\sigma(< i, k >) + 1 = t^\sigma(< j, k + H(i, j) >)$.

6 Posons $x_{ij}^\sigma = 1$ si $t^\sigma(< i, k >) + 1 = t^\sigma(< j, k + H(i, j) >)$ pour tout $k \geq 0$, et $x_{ij}^\sigma = 0$ sinon. Montrer que t^σ, x^σ est solution du programme linéaire à variables bivalentes suivant :

$$\Pi : \begin{cases} \forall i, & \sum_{j \in \Gamma^+(i)} x_{ij} \leq 1 \\ \forall i, & \sum_{j \in \Gamma^-(i)} x_{ji} \leq 1 \\ \forall (i,j) \in G, & t_j - t_i \geq 2 - x_{ij} - wH(i,j) \\ \forall (i,j) \in G, & x_{ij} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

7

On vous demande d'admettre quà toute solution de Π peut être associé un ordonnancement réalisable périodique , c'est à dire que l'on peut définir une affectation des tâches aux machines de sorte que les contraintes soient satisfaites. Supposons données des valeurs $\hat{x}_{ij} \in \{0, 1\}$ satisfaisant les deux premières contraintes de Π. Pour tout arc (i, j) on définit $L_{\hat{x}}(i, j) = 2 - \hat{x}_{ij}$. Que représente la valeur $\alpha_{\hat{x}}$ du circuit critique sur le graphe $(G, L_{\hat{x}}, H)$? Indiquez un algorithme permettant de construire une solution de Π où $w = \alpha_{\hat{x}}$.

Notons W^* la période minimale pour laquelle Π a une solution. Considérons la relaxation continue $\bar{\Pi}$ de Π, construite en considérant $\forall (i, j) \in G, \quad 0 \leq x_{ij} \leq 1$. Notons $\bar{W}$ la période minimale pour laquelle $\bar{\Pi}$ possède une solution, notée $\bar{x}_{ij}, \bar{t}$.

On définit $\hat{x}_{ij} = 1$ si $\bar{x}_{ij} > \frac{1}{2}$, $\hat{x}_{ij} = 0$ sinon.

8 Montrer que $\hat{x}$ satisfait les deux premières contraintes de Π.

9 Montrer que pour tout arc (i, j),

$$L_{\hat{x}}(i, j) \leq \frac{4}{3} L_{\bar{x}}(i, j)$$

10 En déduire que l'on peut construire en temps polynomial un ordonnancement périodique de période

$$\hat{W} \leq \frac{4}{3} W^*$$