Chapitre 2

DISTRIBUTIONS MODELES et DISTRIBUTIONS NORMALES ou GAUSSIENNES

Chapitre 2

1. Modèles de distributions continues

1.1 Distribution modèle d’une variable quantitative

1.2 Fonctions de densité types

1.3 Distributions modèles types

2. La loi normale ou gaussiennne centrée réduite

2.1 Fonction de densité de Z

2.2 Fonction de répartition de Z

3. Le modèle normal ou gaussien

3.1 Fonction de densité de X

3.2 Fonction de répartition de X

4. Paramètres d'ordre des modèles gaussiens

4.1 Quantiles de la loi normale centrée réduite Z

4.2 Intervalles de variation de Z

4.3 Quantiles d'une loi normale X

4.4 Intervalles de variation de X

5. Propriété des lois normales

1. Modèles de distributions continues

1.1 Distribution modèle d'une variable quantitative (1)

X variable quantitative continue de $\mathcal{P}$ à valeurs réelles

Au découpage Δ sont associés

- **la densité de proportions de X : f_Δ**
- **la fonction de répartition de X : F_Δ**
- **les paramètres de X** $\begin{cases} \textbf{quantiles : } Q_\alpha^\Delta \\ \textbf{moyenne : } \mu_\Delta \\ \textbf{écart-type : } \sigma_\Delta \end{cases}$

$\left\{\begin{array}{l} \textbf{X} \text{ suit un } \textbf{modèle de densité f} \\ \textbf{X} \text{ suit une } \textbf{distribution de densité f} \\ \textbf{X} \text{ suit une } \textbf{loi de densité f} \end{array}\right.$

si pour un découpage Δ suffisamment fin $\left\{\begin{array}{l} f_\Delta \text{ est "proche" de } f \\ \text{ou } F_\Delta \text{ est "proche" de } F \end{array}\right.$

alors : $\left\{\begin{array}{l} \mu_\Delta \text{ est "proche" de } \mu \text{ et} \\ \sigma_\Delta \text{ est "proche" de } \sigma \end{array}\right.$

1.1 Distribution modèle d'une variable quantitative (2)

la **distribution modèle** de **X** est décrite au moyen de :

- la **fonction de densité** ou **densité de probabilité** de **X** : **f**
- la **loi de probabilité** de **X** : **P**
  $\mathbf{P}\ (c \leq \mathbf{X} \leq d)$
- la **fonction de répartition** de **X** : **F**
  $\mathbf{F}(x) = \mathbf{P}\ (\mathbf{X} \leq x)$

$\Rightarrow$ les paramètres de **X** $\left\{ \begin{array}{l} \text{quantiles : } \mathbf{Q}_{\alpha} \\ \text{moyenne : } \mu \\ \text{écart-type : } \sigma \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ indépendants du découpage

Exemple

- **Exemple : âge des français**

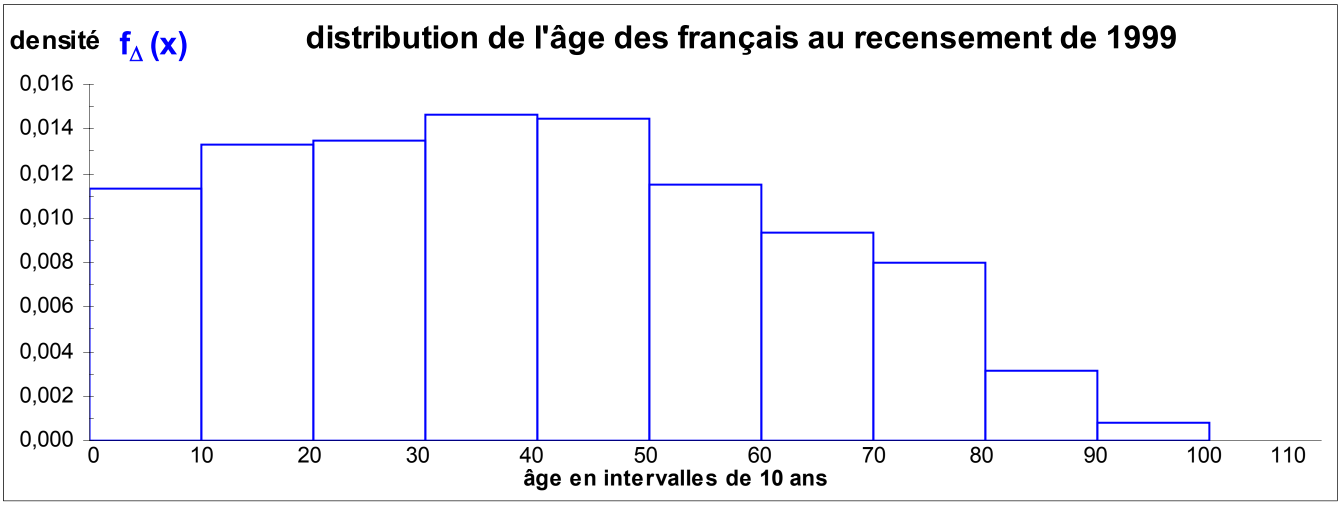
  $\mathcal{P}$= *{français du recensement de 1999}*

  N*= 58 520 688*

  X *= âge quantitative continue sur (0,130)*

➢ **découpage en intervalles de 10 ans :**

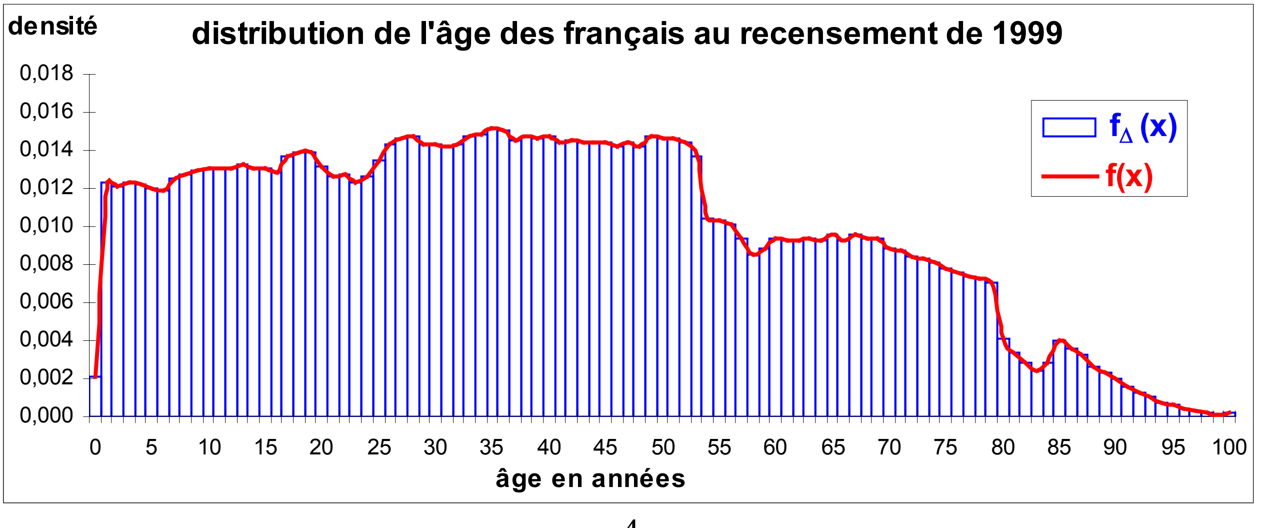
moyenne μ_Δ **= 39,4** *écart-type* σ_Δ **= 23**



➢ **découpage en intervalles de 1 an :**

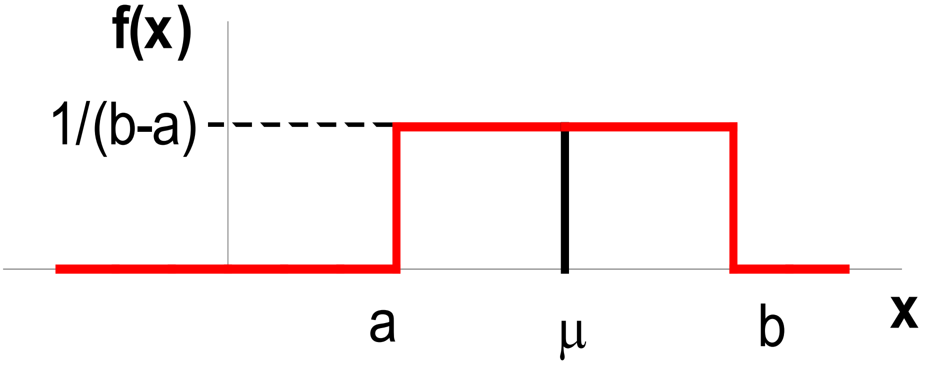
moyenne μ_Δ **= 38,9** *écart-type* σ_Δ **= 23**

➔ *modèle de densité* **f(x)**

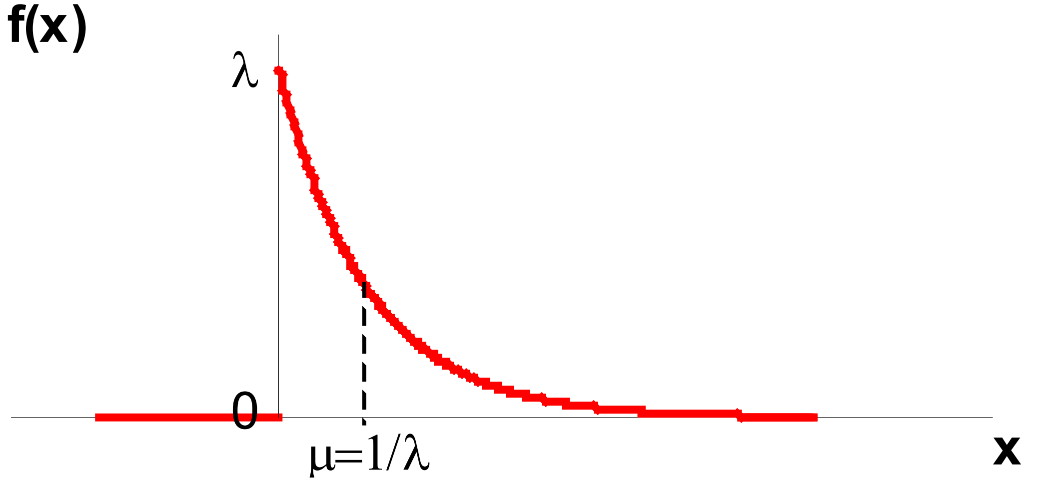


1.2 Fonctions de densité types (1)

– la densité uniforme sur l'intervalle **(a,b)** **$\mathcal{U}$(a,b)** de moyenne **(a+b)/2**

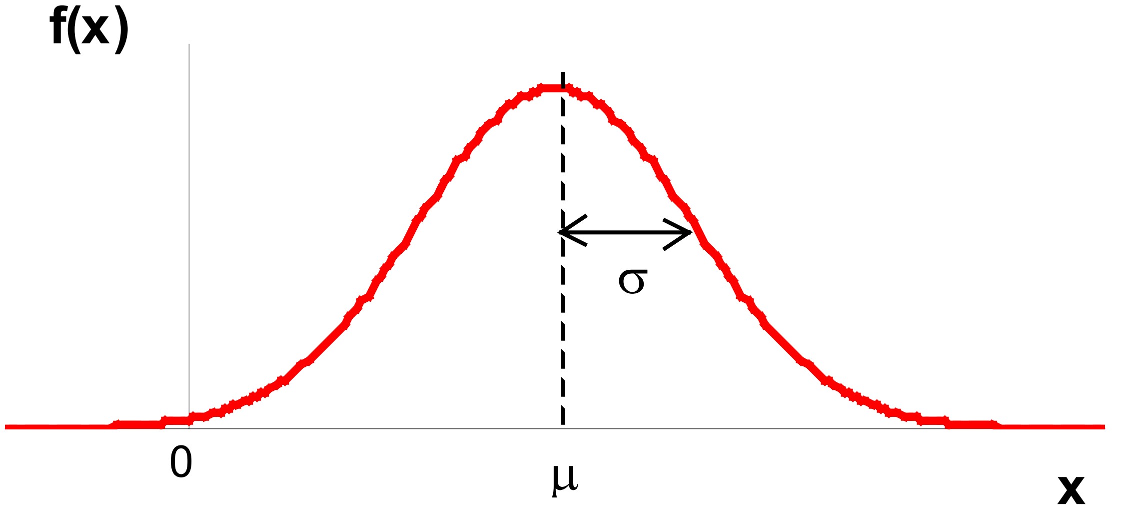


– la densité exponentielle de paramètre λ de moyenne 1/λ

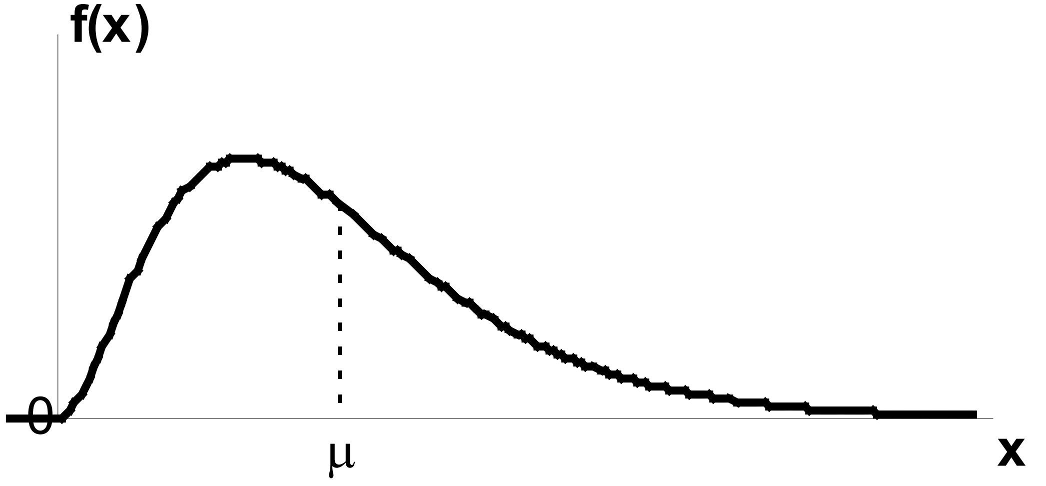


1.2 Fonctions de densité types (2)

– la densité normale ou gaussienne de moyenne μ et d'écart-type σ : $\mathcal{N}(\mu , \sigma)$



– la densité du khi-deux (ou khi-carré) $\chi^2\ (\mu)$ de moyenne μ



1.3 Distributions modèles types

Quelques modèles types pour une variable quantitative continue :

- **loi uniforme**
- **loi exponentielle**
- **loi normale**
- **loi du khi-deux …**

➔ le modèle le plus couramment utilisé est le modèle normal ou gaussien

➔ il est également utilisé comme modèle pour une variable quantitative discrète ayant un "grand" nombre de valeurs ($\boldsymbol{k}$)

➔ on supposera que la variable étudiée $\mathbf{X}$ suit un modèle normal moyenne μ et d'écart-type σ : $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

avec $\mu \approx \mu_\Delta$ et $\sigma \approx \sigma_\Delta$

➔ on cherche à calculer la loi de probabilité de $\mathbf{X}$: $\mathbf{P}\,(c \leq \mathbf{X} \leq d\,)$

<u>Exemples</u> (1)

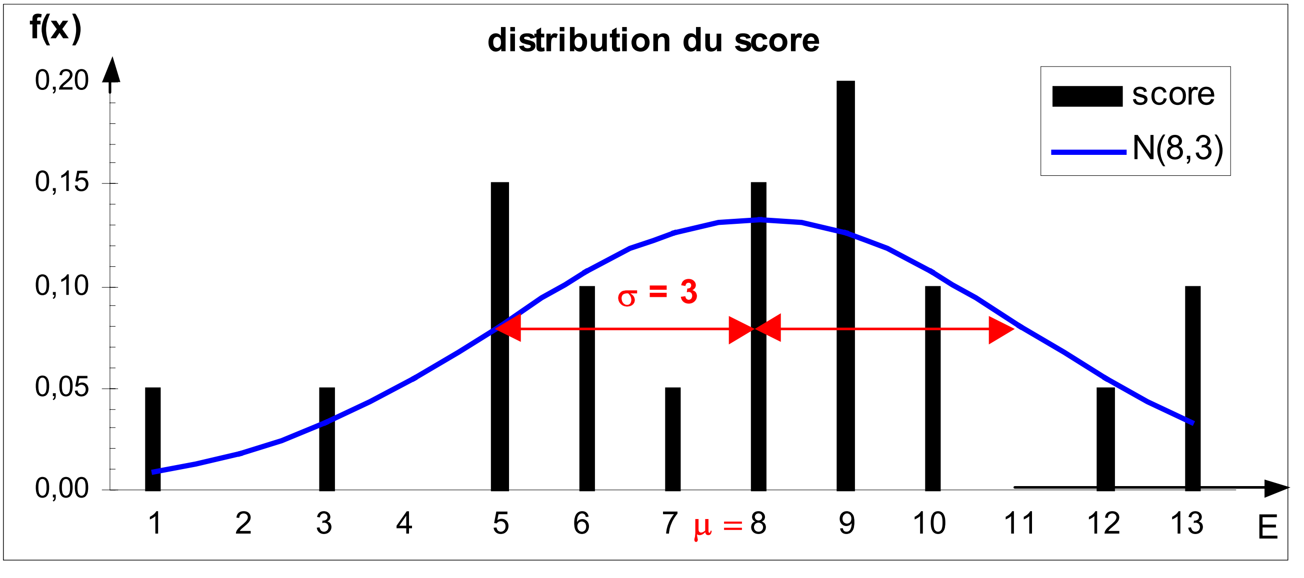
- **Exemple : évaluation de l'humeur**

$\mathcal{P}$= {personnes} ***N****=20*

X *= score d'évaluation de l'humeur*
quantitative discrète sur {1, … 13}

moyenne μ **= 7,8** *et écart-type* σ **= 3,1**

➔ *modèle normal ou gaussien* $\mathcal{N}$**(8,3)**
moyenne μ **= 8** *et écart-type* σ **= 3**



Exemples (2)

- **Exemple : évaluation du stress perçu**

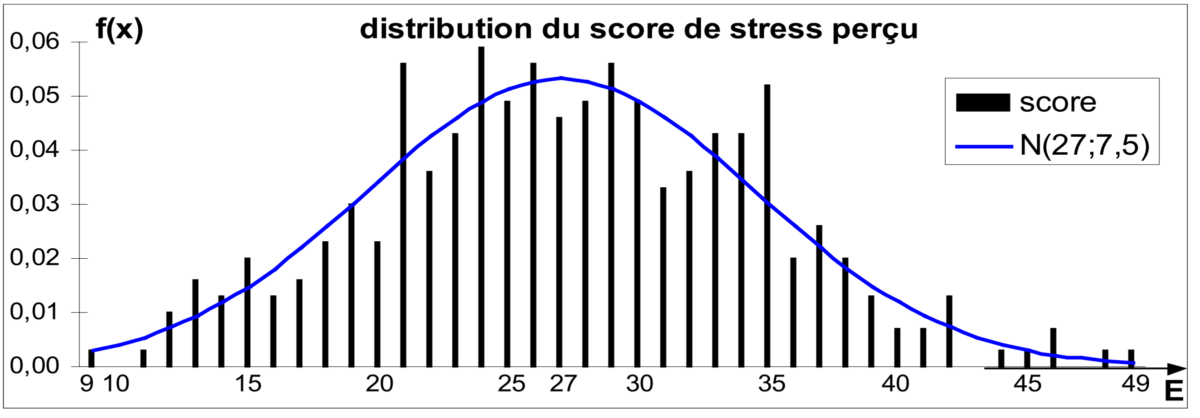
  $\mathcal{P}$= {personnes} **N**=*305*

  X = *score d'évaluation du stress perçu*
  quantitative discrète sur {0, … 56}

  moyenne μ **= 27,3** *écart-type* σ **= 7,4**

  ➔ *modèle normal* $\mathcal{N}$**(27;7,5)**

  moyenne μ **= 27** *écart-type* σ **= 7,5**

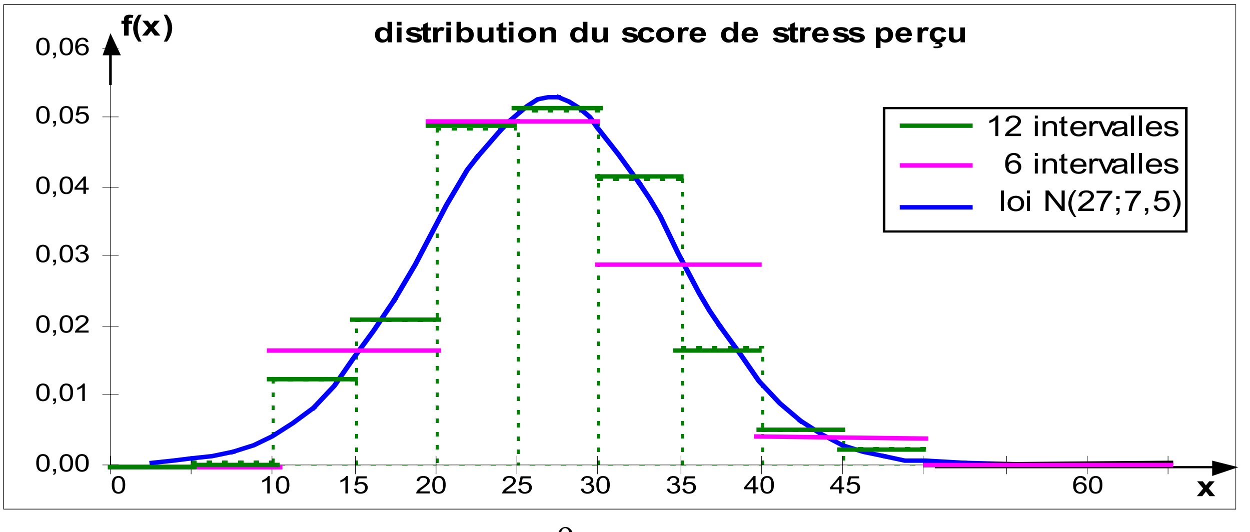


découpage en classes de 5 points

μ_Δ **= 26,8** *et* σ_Δ **= 7,5**

découpage en classes de 10 points

μ_Δ **= 27** *et* σ_Δ **= 7,7**



Exemples (3)

- **Exemple : âge des français**

  $\mathcal{P}$= {français du recensement de 1999}

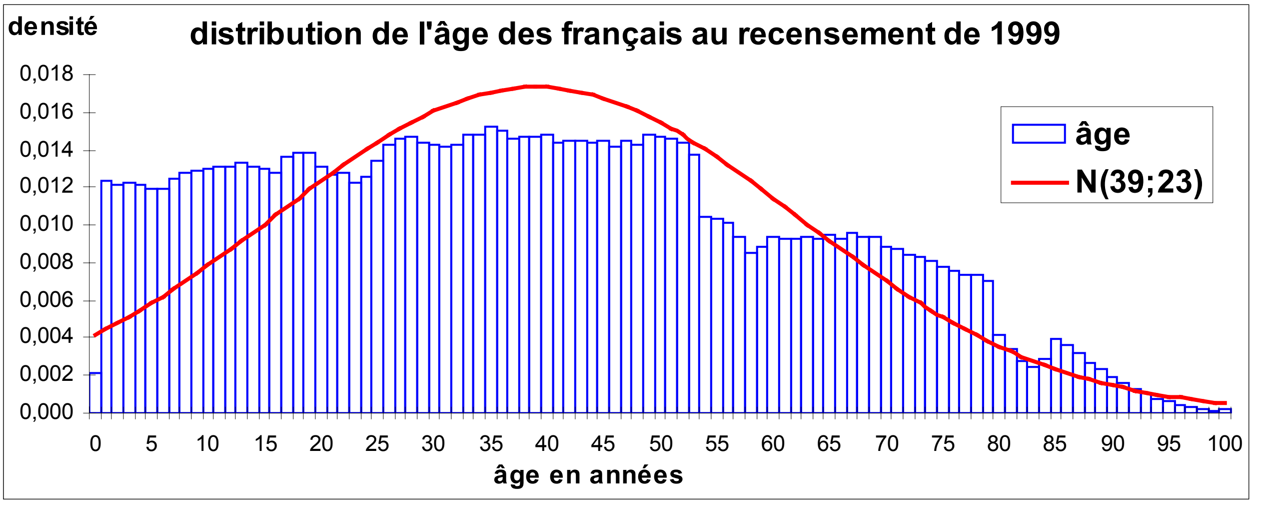
  ***N**= 58 520 688*

  ***X** = âge quantitative continue sur (0,130)*

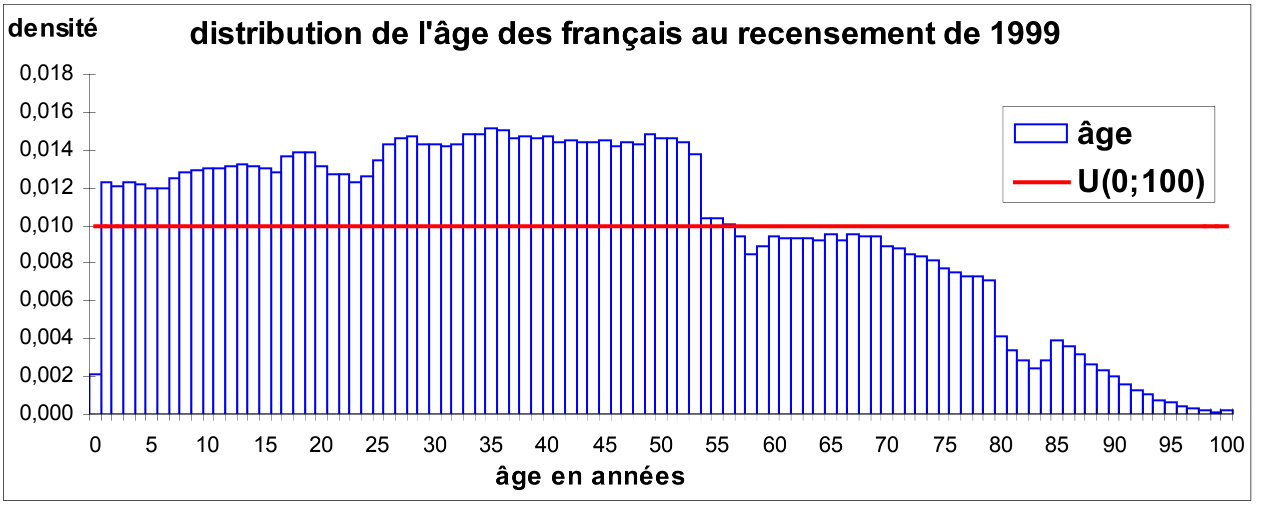
  moyenne μ_Δ **= 38,9** *écart-type* σ_Δ **= 23**

  ➔ *modèle normal* $\mathcal{N}$**(39, 23)**

  moyenne μ **= 39** *écart-type* σ **= 23**



➔ *modèle uniforme sur (0;100)* $\mathcal{U}$**(0, 100)**



2. La loi normale ou gaussiennne centrée réduite

2.1 Fonction de densité de Z

Z variable quantitative continue suit une **loi normale** (ou **gaussienne**) **centrée réduite** si sa fonction de densité **f** est définie par :

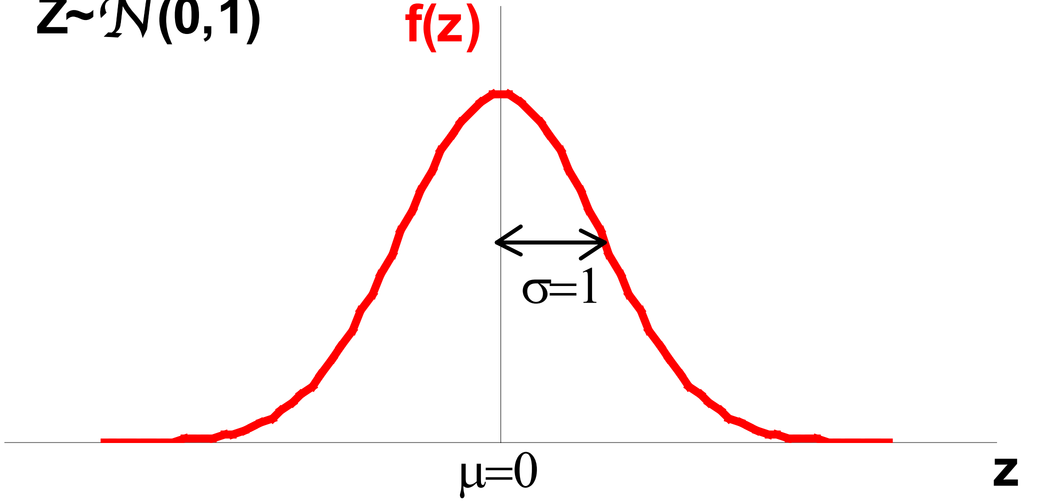
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}$$

Z représente la variable normale $\mathcal{N}(0,1)$

Z ~ $\mathcal{N}(0,1)$ "***Z suit la loi*** $\mathcal{N}(0,1)$"

z représente une valeur quelconque de **Z** (nombre réel)

Z~$\mathcal{N}$(0,1)

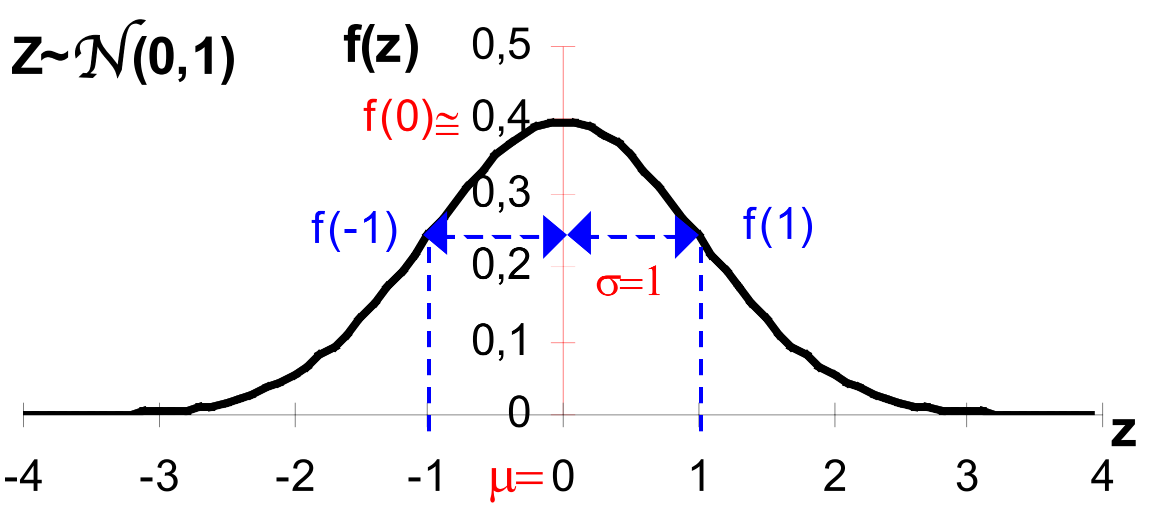


Propriétés de la densité de Z

- **Z** est une variable **centrée** et **réduite** : moyenne **$\mu = 0$** et variance **$\sigma^2 = 1$**
- le mode est égal à 0 car **f(0)** est maximum
  - $$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}3989 \approx 0{,}4$$
- **f** symétrique par rapport à l'axe vertical

$$\mathbf{f(-z) = f(z)}$$

  - $$f(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0{,}5} = 0{,}2420 = f(-1)$$
  - $$f(4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-8} = 0{,}00013 = f(-4)$$



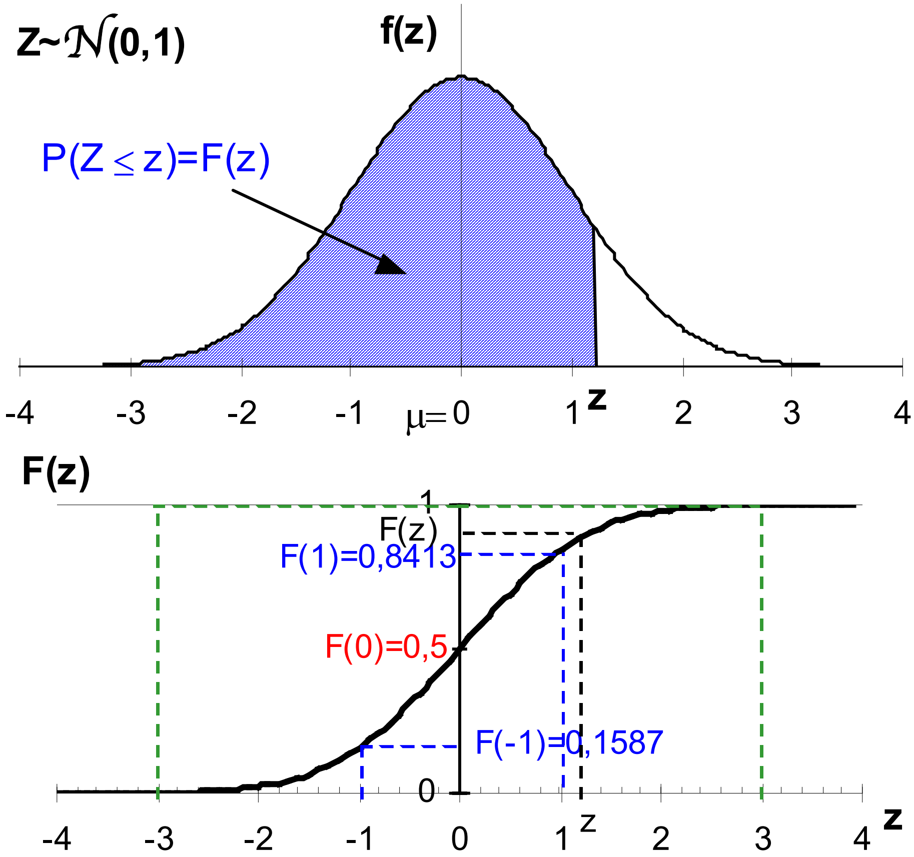
2.2 Fonction de répartition de Z

La fonction de répartition de **Z** notée **F** est définie par :

$F(z) = P(Z \leq z) = P(Z < z)$

= proportion de valeurs de **Z** inférieures à **z**

= aire de la surface hachurée sous la densité **f** de **Z** de $-\infty$ à **z**



$F(0) = P(Z \leq 0) = 0{,}5$ car la densité **f** est symétrique par rapport à l'axe vertical

$\Rightarrow$ 50% des valeurs de **Z** sont négatives et 50% des valeurs de **Z** sont positives

Utilisation de la table de la fonction de répartition de Z :

valeurs positives de Z (1)

- On ne sait pas calculer de manière simple **F(z)** pour une valeur quelconque de **z**

- **Pour les valeurs positives de Z : $z \geq 0$** pour certaines valeurs de **z** (comprises entre **0** et **4,9**) les valeurs de **F(z)** sont données dans la **table** de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

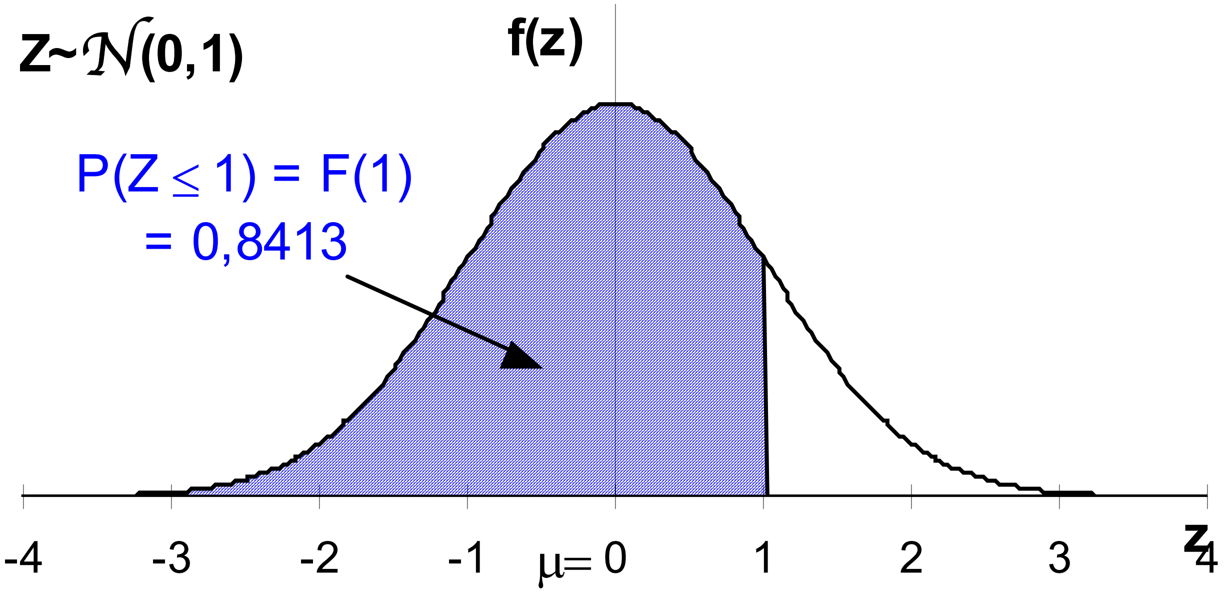
Extrait de la table

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678

Utilisation de la table de la fonction de répartition de Z : valeurs positives de Z (2)

- **Exemples :**
  - *on vérifie que* $P(Z \leq 0) = F(0) = 0{,}5$
  - $P(Z \leq 1) = F(1) = 0{,}8413$

    → ***84,13% des valeurs de Z sont inférieures à 1***



  - $P(Z \leq 1{,}65) = F(1{,}65) = 0{,}9505$

    → ***95,05% des valeurs de Z sont inférieures à 1,65***

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Extrait de la table

Table pour les grandes valeurs de z

z	3,0	3,1	3,2	3,3
F(z)	0,998650	0,999032	0,999313	0,999517

z	4,0	4,1	4,2	4,3
F(z)	0,999968	0,999979	0,999987	0,999991

- **Exemple :**
  - $P(Z \leq 3) = F(3) = 0,99865$

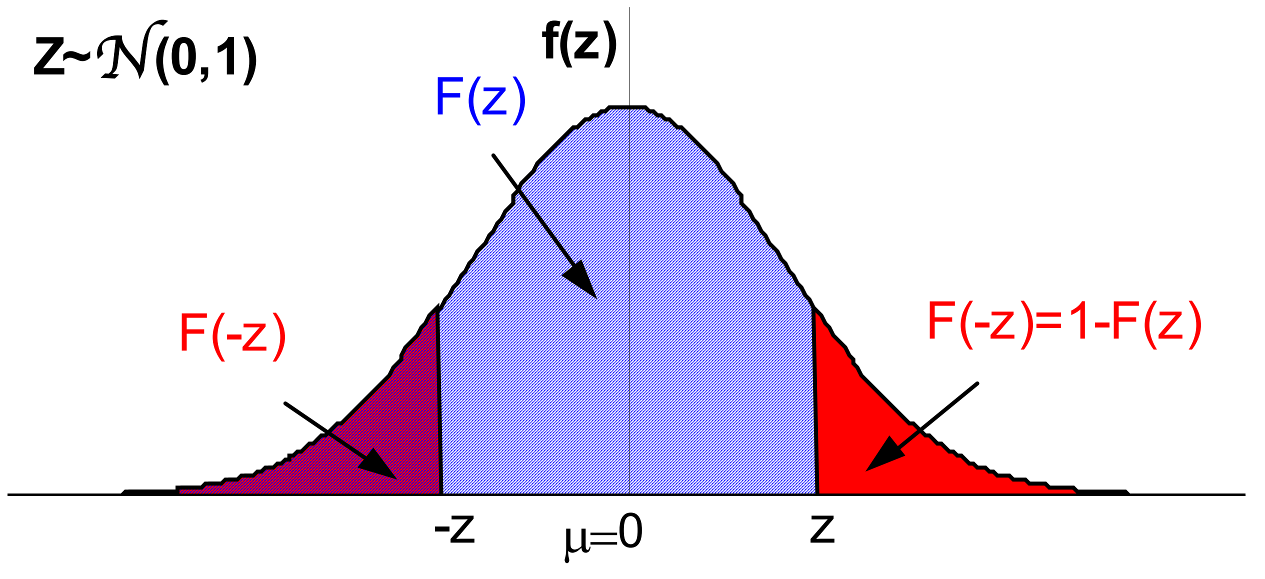
  → ***99,865% des valeurs de Z sont inférieures à 3***

Utilisation de la table de la fonction de répartition de Z : valeurs négatives de Z (1)

- **Pour les valeurs négatives de Z**

$z > 0$ donc $-z < 0$

$P(Z \leq -z) = F(-z) = 1-F(z)$



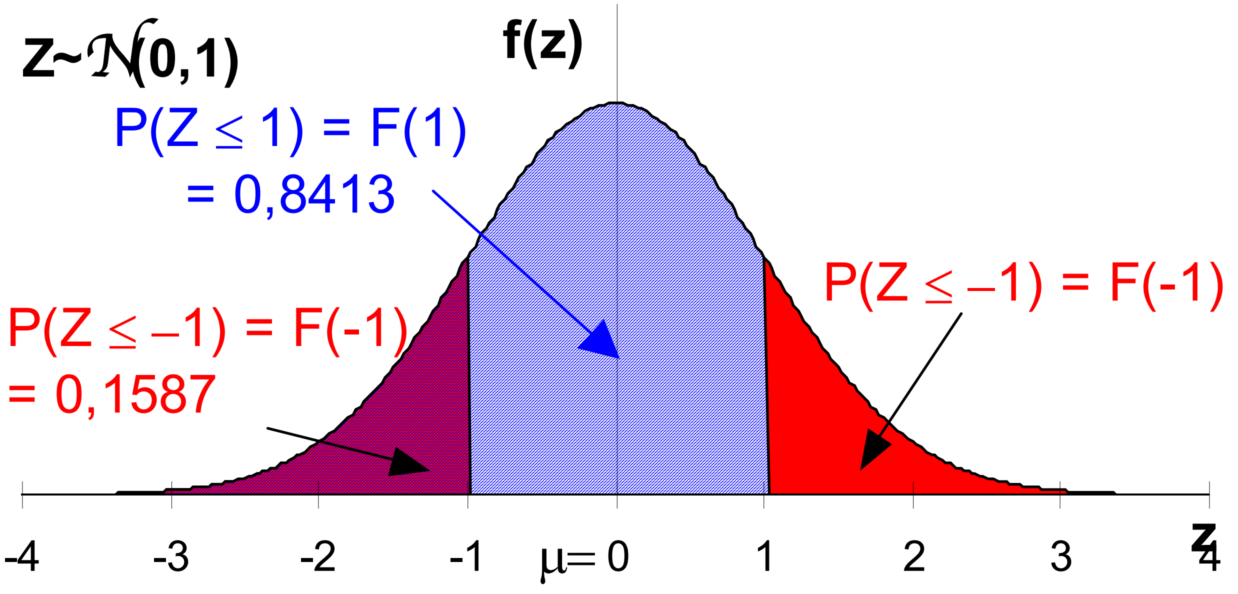
par symétrie, les aires des deux surfaces rouges sont égales

Utilisation de la table de la fonction de répartition de Z : valeurs négatives de Z (2)

- **Exemples :**

  - $P(Z \leq -1) = F(-1) = 1 - F(1)$
    $= 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

  ➔ ***15,87% des valeurs de Z sont inférieures à –1***



  - $P(Z \leq -1{,}65) = F(-1{,}65) = 1 - F(1{,}65)$
    $= 1 - 0{,}9505 = 0{,}0495$

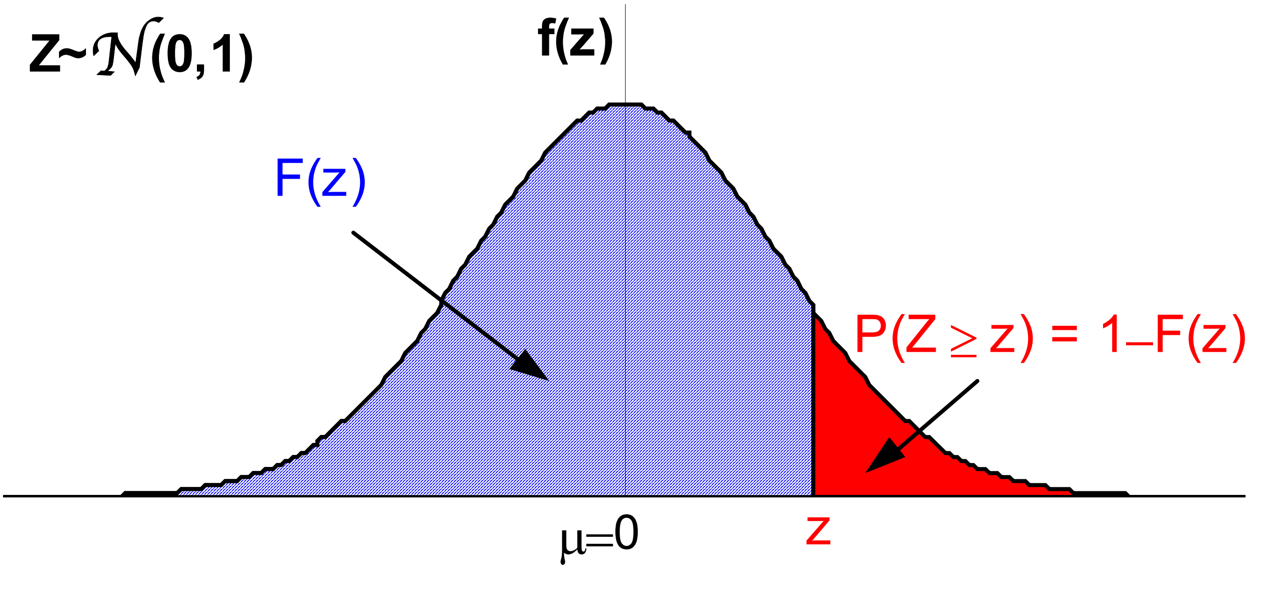
  ➔ ***4,95% des valeurs de Z sont inférieures à –1,65***

Calcul de proportions (1)

- **Proportion de valeurs de Z supérieures à une valeur réelle z :**

$$\mathbf{P(Z \geq z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - F(z)}$$

= aire de la surface hachurée sous la densité **f** de **Z** à partir de **z**



<u>Calcul de proportions</u> (2)

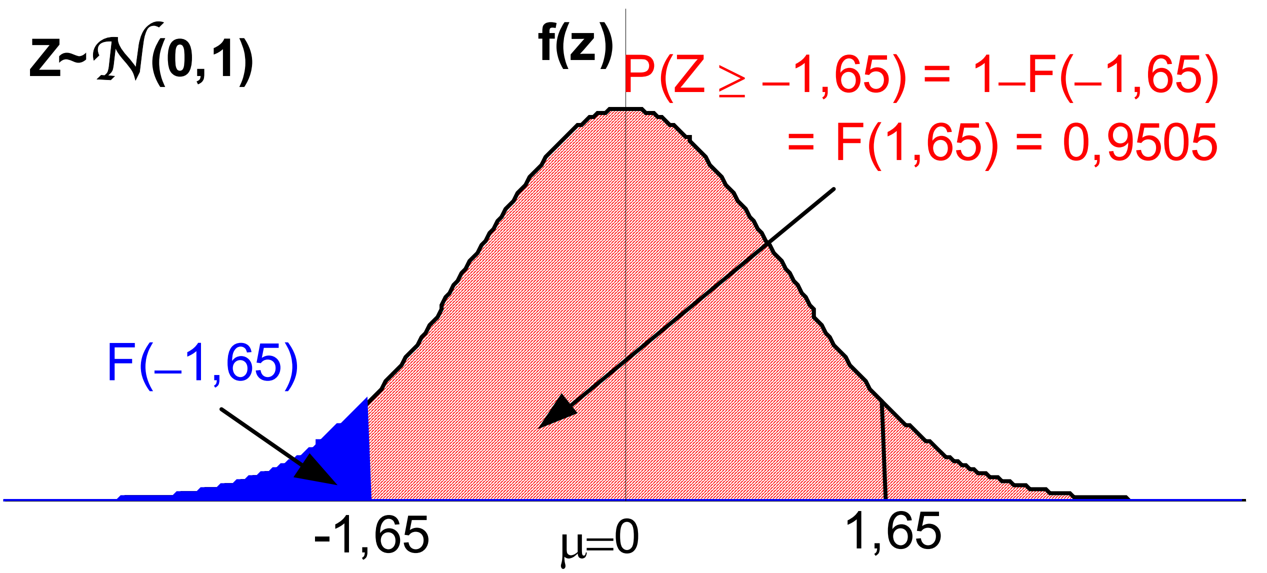
- **Exemples :**

  - **$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - F(1)$**
    $= 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

  ➔ ***15,87%* des valeurs de Z sont supérieures à 1**

  - $P(Z \geq -1{,}65) = \mathbf{1 - P(Z \leq -1{,}65)}$
    $\mathbf{= 1 - F(-1{,}65)}$
    $\mathbf{= 1 - (1 - F(1{,}65))}$
    $\mathbf{= F(1{,}65)} = 0{,}9505$

  ➔ ***95,05%* des valeurs de Z sont supérieures à –1,65**

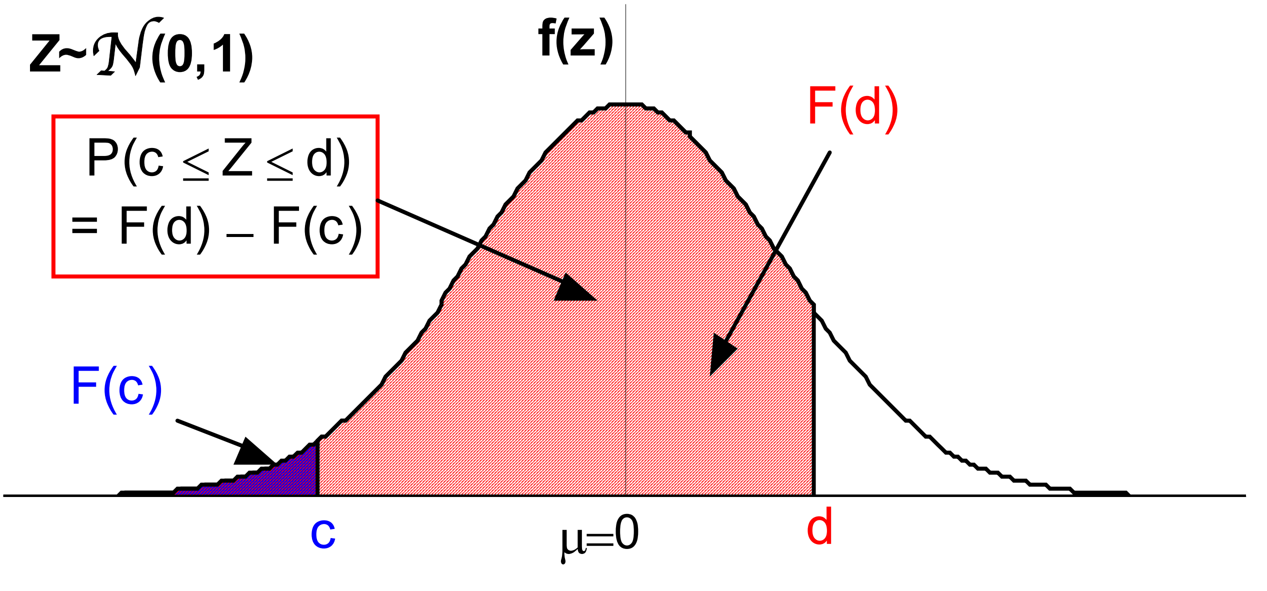


Calcul de proportions (3)

➢ **Proportion de valeurs de $\boldsymbol{Z}$ comprises entre deux réels $\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{d}$:**

$$P\,(c \leq Z \leq d) = F(d) - F(c)$$

= aire de la surface hachurée sous la densité **f** de **Z** entre *c* et *d*

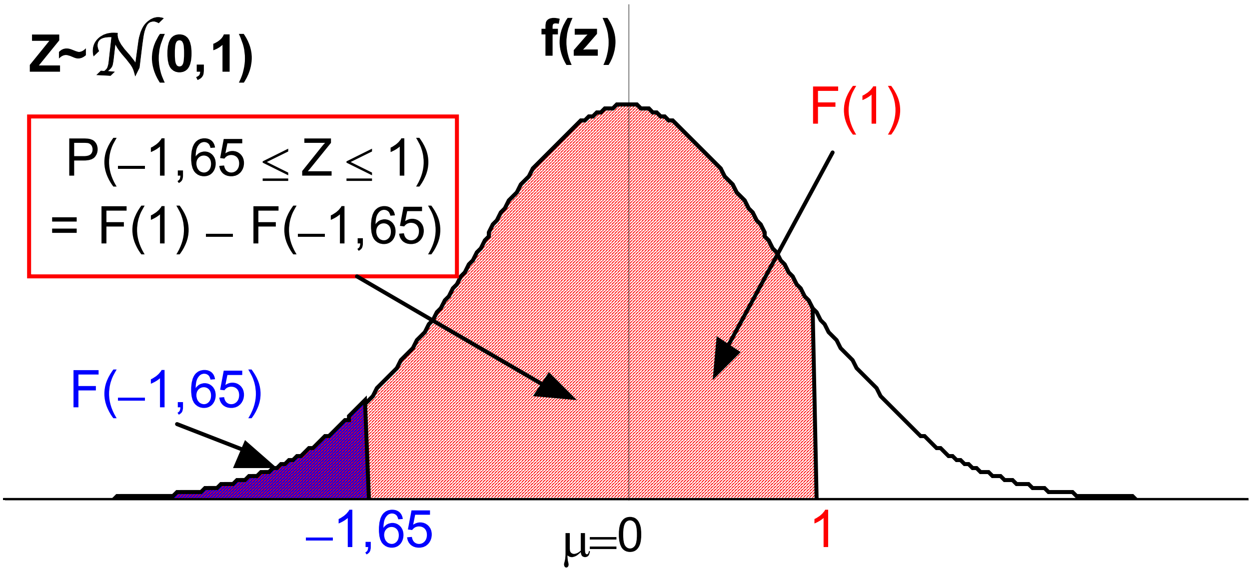


<u>Calcul de proportions</u> (4)

- **Exemples :**

  - $P(-1{,}65 \leq Z \leq 1) = F(1) - F(-1{,}65)$
    $= 0{,}8413 - (1 - F(1{,}65))$
    $= 0{,}8413 - (1 - 0{,}9505)$
    $= 0{,}8413 - 0{,}0495$
    $= 0{,}7918$

  ➔ ***79,18%* des valeurs de Z sont comprises entre –1,65 et 1**



  - $P(-1 \leq Z \leq 1) = F(1) - F(-1)$
    $= F(1) + (1 - F(1))$
    $= 2 \times F(1) - 1$
    $= 1{,}6826 - 1 = 0{,}6826$

  ➔ ***68,26%* des valeurs de Z sont comprises entre –1 et 1**

3. Le modèle normal ou gaussien

3.1 Fonction de densité de X

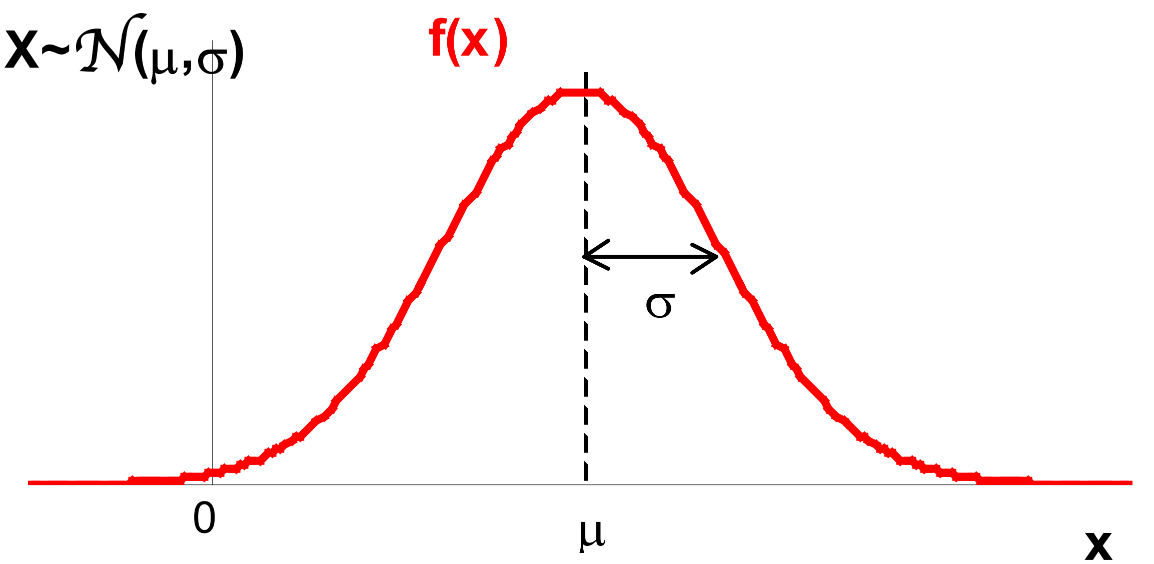
X variable quantitative continue suit
un **modèle normal** (ou **gaussien**)
de **moyenne** μ et d'**écart-type** σ
si sa fonction de densité **f** est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

X représente la variable normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$

X $\sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ "**X *suit la loi*** $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$"

x représente une valeur quelconque de **X**

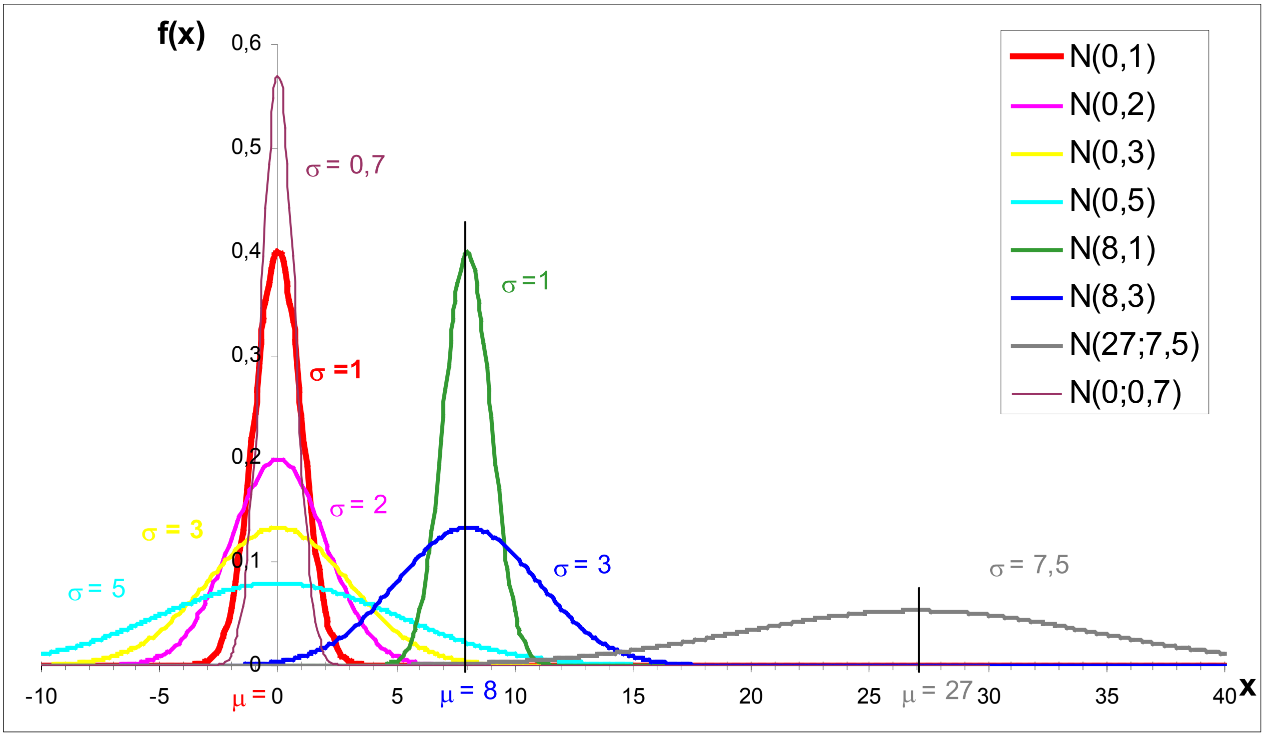


Propriétés de la densité de X

- le mode est égal à μ car $f(\mu)$ est maximum
- **f** symétrique par rapport à l'axe vertical passant par μ $\quad f(\mu - x) = f(\mu + x)$
- la **variable centrée réduite** (standardisée) **Z** associée à **X** $\boxed{Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}}$

  suit un modèle normal centré réduit $\mathcal{N}(0,1)$

Exemples de lois normales



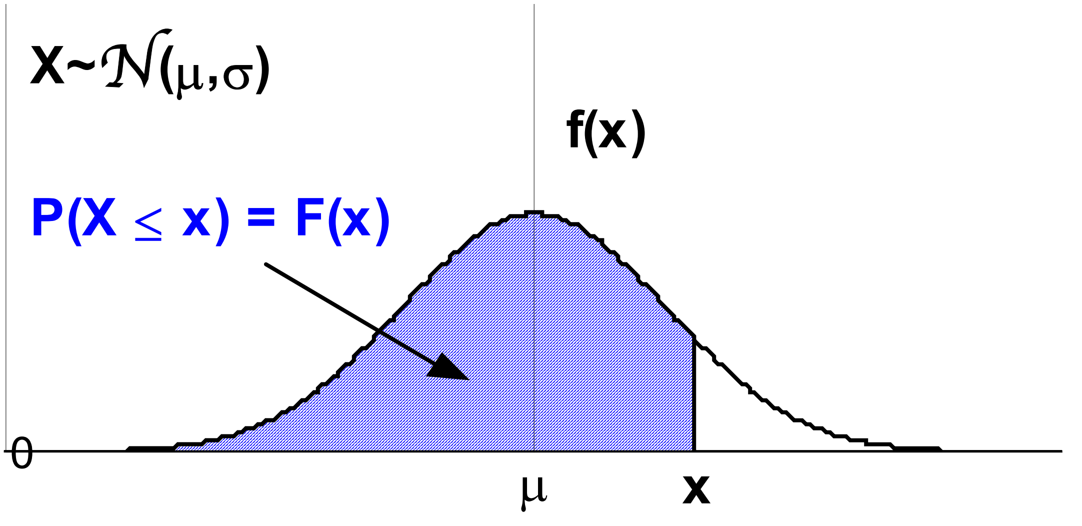
3.2 Fonction de répartition de X

La fonction de répartition de **X** notée **F** est définie par :

$\mathbf{F}(x) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \leq x) = \mathbf{P}(\mathbf{X} < x)$

= proportion de valeurs de **X** inférieures à x

= aire de la surface hachurée sous la densité **f** de **X** de $-\infty$ à x



$\mathbf{F}(\mu) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \leq \mu) = \mathbf{0{,}5}$ car la densité **f** est symétrique par rapport à l'axe vertical passant par μ

$\Rightarrow$ 50% des valeurs de **X** sont inférieures à μ

50% des valeurs de **X** sont supérieures à μ

Calcul de la fonction de répartition de X (1)

- On ne sait pas davantage calculer de manière simple **F(x)** pour une valeur quelconque de x
- Puisque **F(x)** dépend des valeurs de μ et σ il est impossible de donner des tables pour toutes les valeurs de μ et σ
- Pour calculer **F(x)** la **table** de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite suffit, en utilisant la propriété suivante

Propriété de la fonction de répartition de X

X représente la variable normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$

x représente une valeur quelconque de **X**

Z représente la variable normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ associée à **X**

$$\boxed{Z = \frac{X-\mu}{\sigma}}$$

$$\boxed{z = \frac{x-\mu}{\sigma}}$$

représente la valeur centrée réduite (standardisée) associée à la valeur **x** de **X**

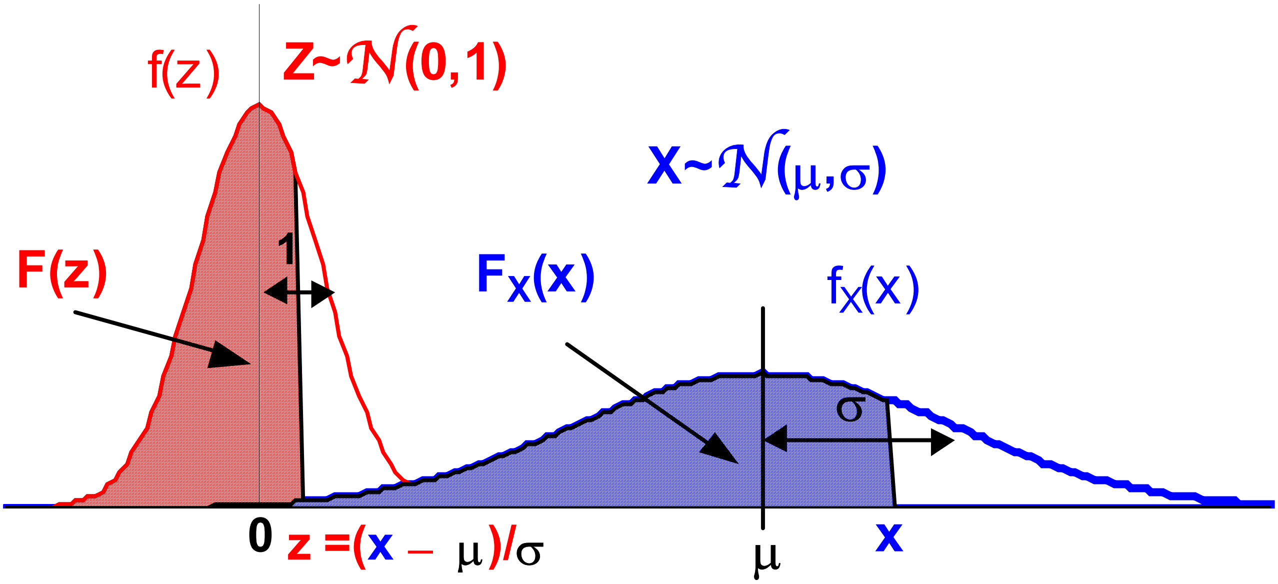
- ➢ la fonction de répartition de **X** se déduit de celle de **Z**

$$\boxed{P(X \le x) = P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P(Z \le z) = F(z)}$$

$\Rightarrow$ la proportion de valeurs de **X** inférieures à ***x*** est égale à
la proportion de valeurs de **Z** inférieures à la valeur centrée réduite **z**

Calcul de la fonction de répartition de X (2)

$\Rightarrow$ les aires des deux surfaces hachurées sur le graphique sont égales



$$P(X \le x) = P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P(Z \le z) = F(z)$$

calcul de F(x)

- calculer la valeur centrée réduite **z** pour x, μ et σ donnés
- chercher la valeur de **F(z)** dans la table de la loi normale 𝒩(0,1)

Calcul de la fonction de répartition de X (3)

- **Exemple : évaluation de l'humeur**

X = *score d'évaluation de l'humeur*

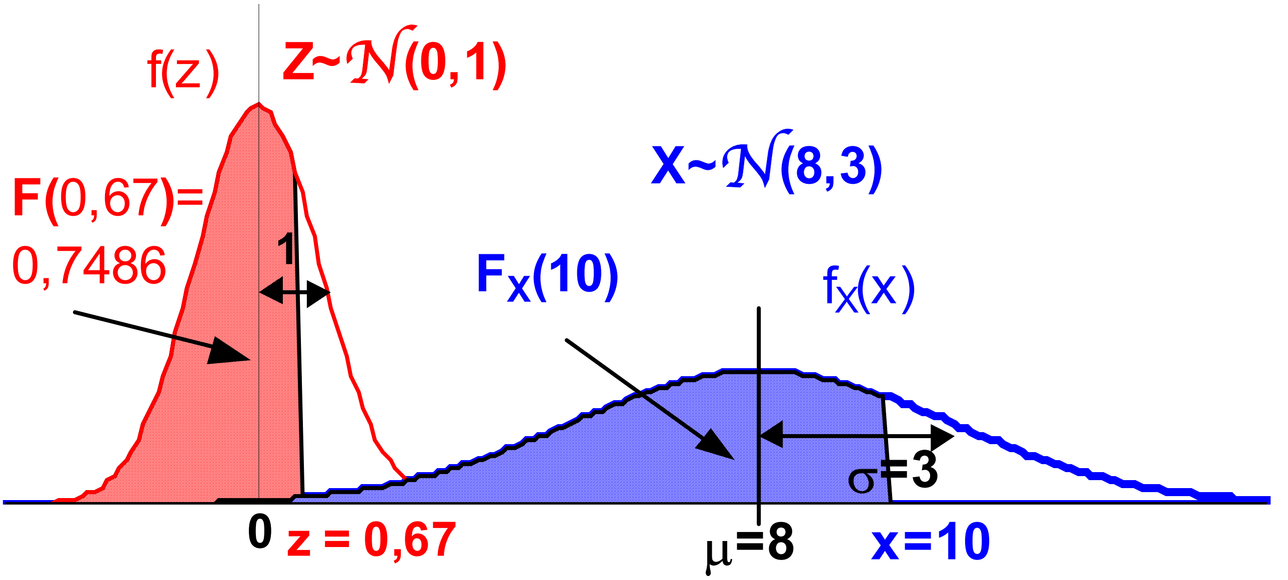
on suppose que X suit un modèle normal de moyenne 8 et d'écart-type 3 dans $\mathcal{P}$ = *{personnes}*

$X \sim \mathcal{N}(8,3)$

➢ $P(X \leq 10) \Rightarrow z = (10 - 8) / 3 \approx 0,67$

$P(X \leq 10) \approx P(Z \leq 0,67) = F(0,67) = 0,7486$

➔ ***74,86% des scores (valeurs de X) sont inférieurs à 10***



Calcul de la fonction de répartition de X (4)

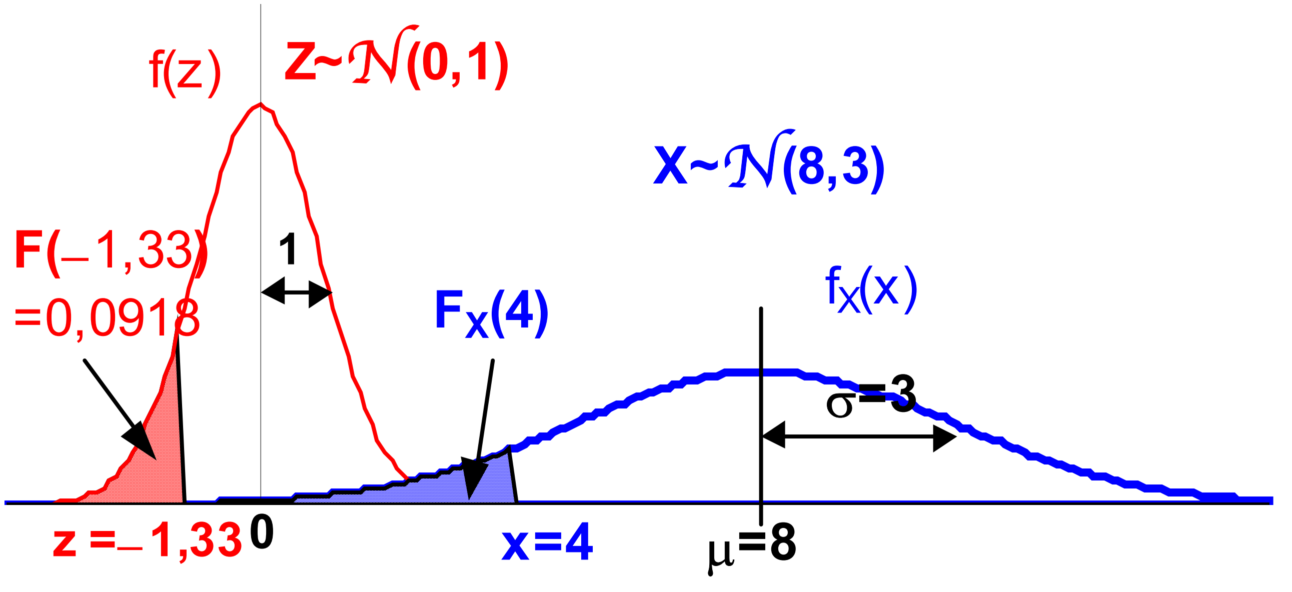
- **Exemple : évaluation de l'humeur**

  $X \sim \mathcal{N}(8,3)$

  ➢ $P(X \leq 4) \Rightarrow \; z = (4-8)/3 \approx -1{,}33$

  $$P(X \leq 4) \approx P(Z \leq -1{,}33) = F(-1{,}33) = 1 - F(1{,}33) = 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$$

  ➔ ***9,18% des scores (valeurs de X) sont inférieurs à 4***



Calcul de proportions

- **Exemple : évaluation de l'humeur**

  X $\sim \mathcal{N}(8,3)$

➢ $P(2 \leq X \leq 11) = P(X \leq 11) - P(X \leq 2)$

$P(X \leq 11) \Rightarrow \; z = (11 - \mathbf{8}) / \mathbf{3} = 1$

$P(X \leq 11) = P(Z \leq 1) = F(1) = 0{,}8413$

$P(X \leq 2) \Rightarrow \; z = (2 - \mathbf{8}) / \mathbf{3} = -2$

$P(X \leq 2) = P(Z \leq -2) = F(-2)$

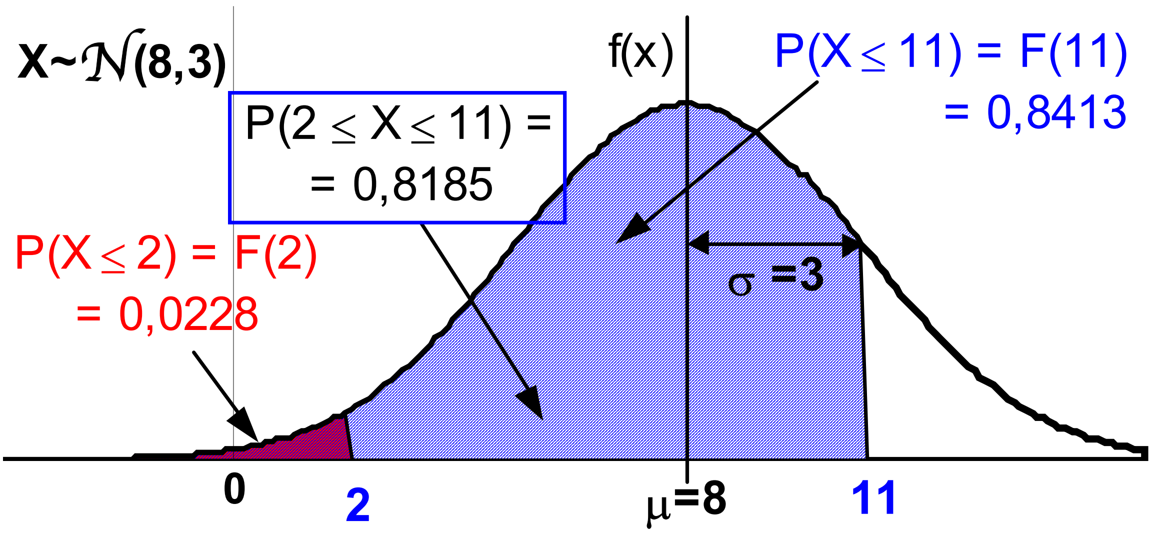
$= 1 - F(2) \; = 1 - 0{,}9772$

$= 0{,}0228$

$P(2 \leq X \leq 11) = 0{,}8413 - 0{,}0228$

$= 0{,}8185$

➔ ***81,85% des scores (valeurs de X) sont compris entre 2 et 11***



4. Paramètres d'ordre des modèles gaussiens

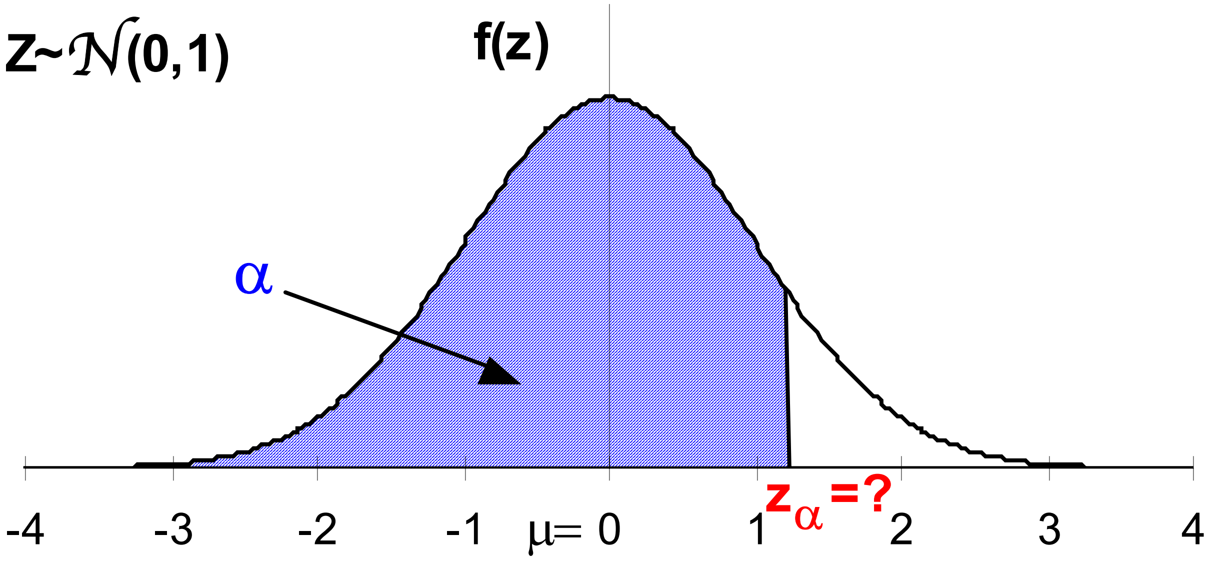
4.1 Quantiles de la loi normale centrée réduite Z

Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

Le quantile d'ordre α de **Z** noté $\mathbf{z}_\alpha$ est défini pour α fixé, par :

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z} \leq \mathbf{z}_\alpha) = \mathbf{F}(\mathbf{z}_\alpha) = \alpha$$

➔ on fixe une proportion α ($0 \leq \alpha \leq 1$)
on cherche la valeur $\mathbf{z}_\alpha$ de Z telle que
α**%** des valeurs de Z sont inférieures à $\mathbf{z}_\alpha$



Calcul des quantiles de Z : ordre supérieur à 50% (1)

- $\alpha = 0{,}5$: $\mathbf{z_{0,5}}$ = **médiane de Z = 0**

  car $P(Z \leq \mathbf{0}) = F(\mathbf{0}) = 0{,}5$

  $\Rightarrow$ **moyenne = médiane = mode = 0**

- **Pour le quantile z_α d'ordre α de Z avec $\alpha \geq$ 0,5**

  on cherche à quelle valeur z_α correspond la probabilité α donnée

  $\Rightarrow$ lire la table de la fonction de répartition de Z en sens inverse

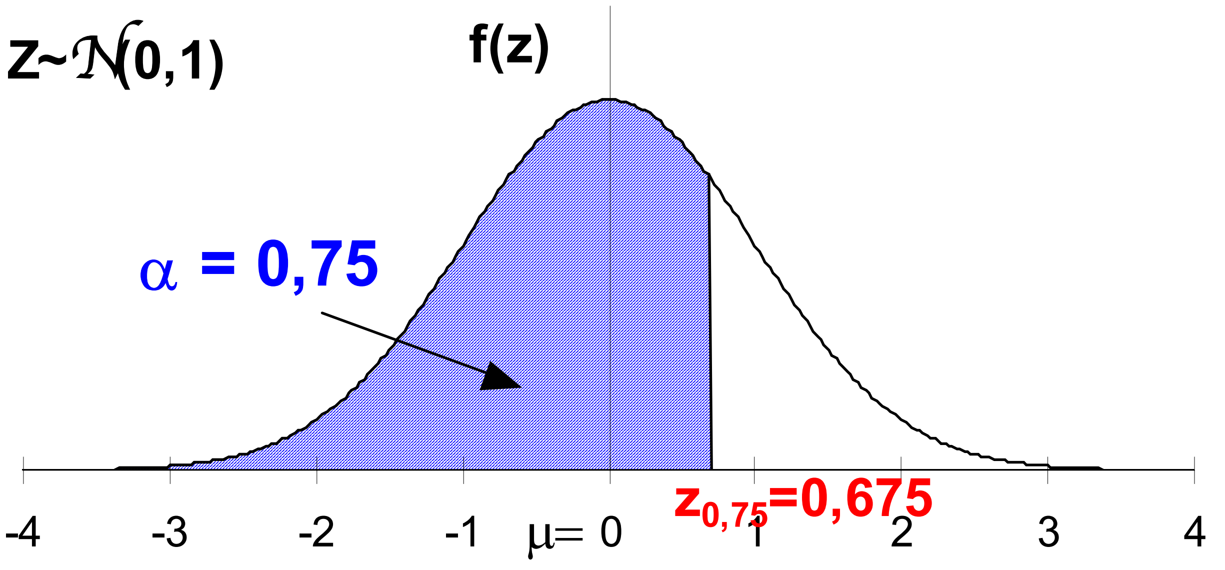
Calcul des quantiles de Z : ordre supérieur à 50% (2)

- **Exemples :**
  - **le troisième quartile de Z (quantile d'ordre 0,75) : $z_{0,75}$**

    $P(Z \leq z_{0,75}) = F(z_{0,75}) = 0,75$

    Dans la table, on trouve :
    $0,7486 = F(0,67)$ et $0,7517 = F(0,68)$
    donc $0,67 \leq z_{0,75} \leq 0,68$
    on choisit soit $z_{0,75} = 0,67$
    soit $z_{0,75} = 0,68$ soit $\mathbf{z_{0,75} = 0,675}$

  → ***75% des valeurs de Z sont*** **inférieures à 0,675**



Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Extrait de la table

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Calcul des quantiles de Z :
ordre supérieur à 50% (3)

- **Exemples :**
  - **le 9ème décile (quantile d'ordre 0,9) de Z : $z_{0,90}$**

    $P(Z \leq z_{0,9}) = F(z_{0,9}) = 0,9$

    Dans la table, on trouve :
    $0,8997 = F(1,28)$ et $0,9015 = F(1,29)$
    donc $1,28 \leq z_{0,9} \leq 1,29$
    on choisit soit $\mathbf{z_{0,9} = 1,28}$
    soit $z_{0,9} = 1,29$ soit $z_{0,9} = 1,285$

  → ***90% des valeurs de Z sont* inférieures à 1,28**

  - **le quantile d'ordre 0,975 de Z : $z_{0,975}$**

    $P(Z \leq z_{0,975}) = F(z_{0,975}) = 0,975$

    Dans la table, on trouve :
    $0,975 = F(1,96)$ donc $\mathbf{z_{0,975} = 1,96}$

  → ***97,5% des valeurs de Z sont* inférieures à 1,96**

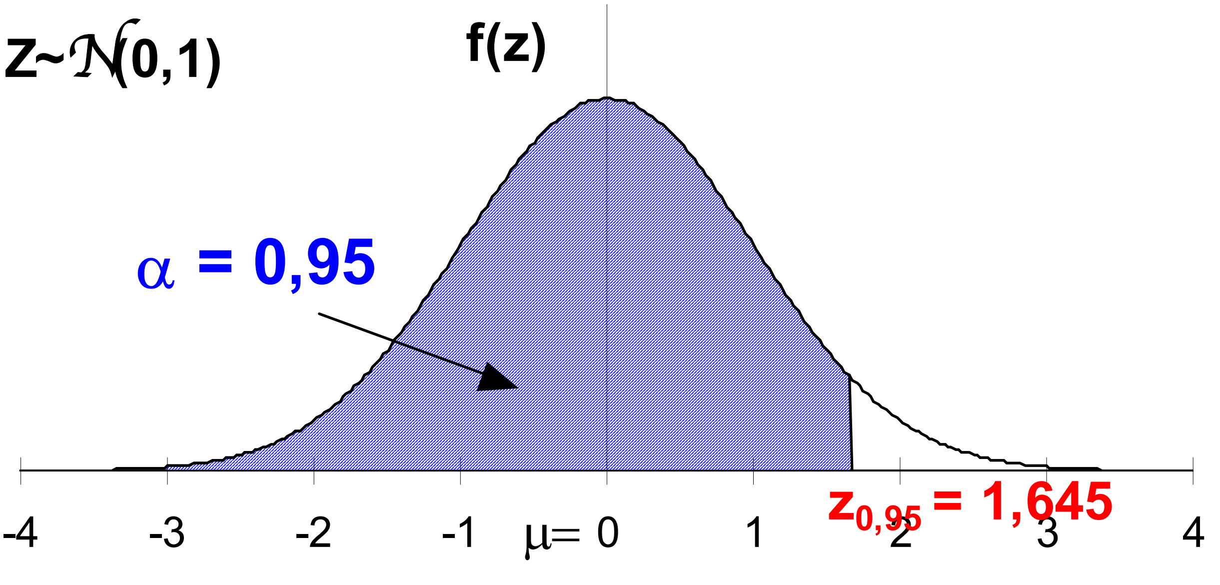
Calcul des quantiles de Z : ordre supérieur à 50% (4)

- **Exemples :**
  - **le 95ème percentile (quantile d'ordre 0,95) de Z : $z_{0,95}$**

    $P(Z \leq z_{0,95}) = F(z_{0,95}) = 0,95$

    Dans la table, on trouve :
    $0,9495 = F(1,64)$ et $0,9505 = F(1,65)$
    donc $1,64 \leq z_{0,95} \leq 1,65$
    on choisit soit $z_{0,95} = 1,64$
    soit $z_{0,95} = 1,65$ soit $\mathbf{z_{0,95} = 1,645}$

→ ***95% des valeurs de Z sont inférieures à 1,645***



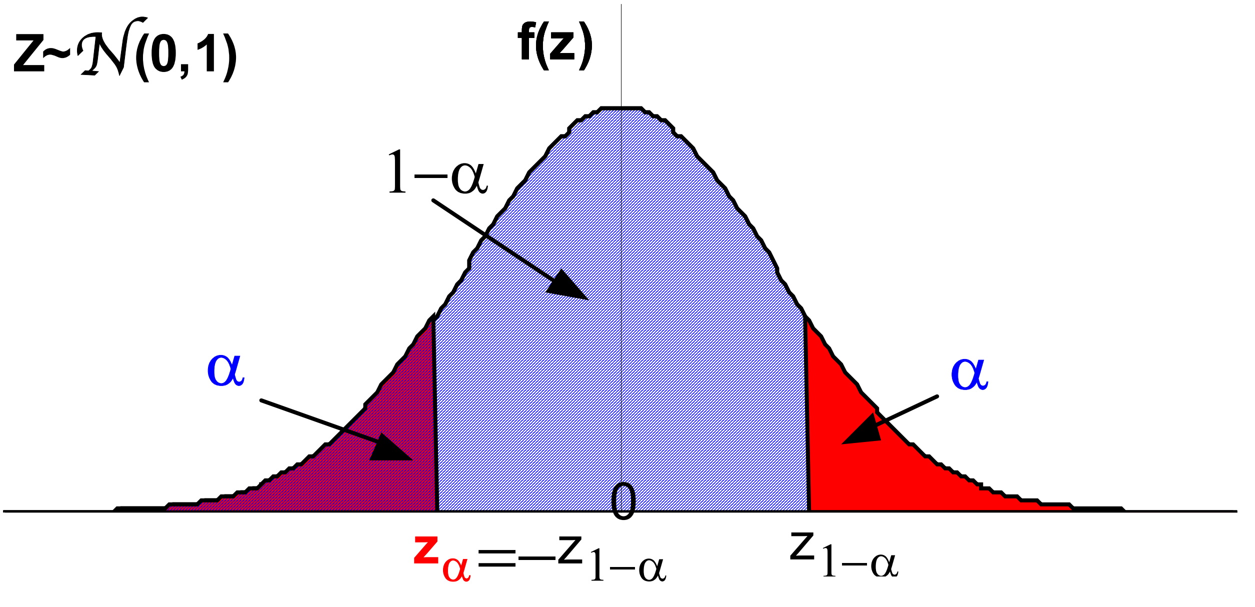
Calcul des quantiles de Z : ordre inférieur à 50% (1)

- **Pour le quantile z_α d'ordre α de Z avec $\alpha < 0{,}5$**

  on cherche donc une valeur z_α qui doit être négative

  $\Rightarrow$ on ne peut plus utiliser directement la table de la fonction de répartition de Z

  $\Rightarrow$ on utilise le fait que z_α et $-z_{1-\alpha}$ sont opposés (symétriques par rapport à **0**) c'est à dire que : $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$

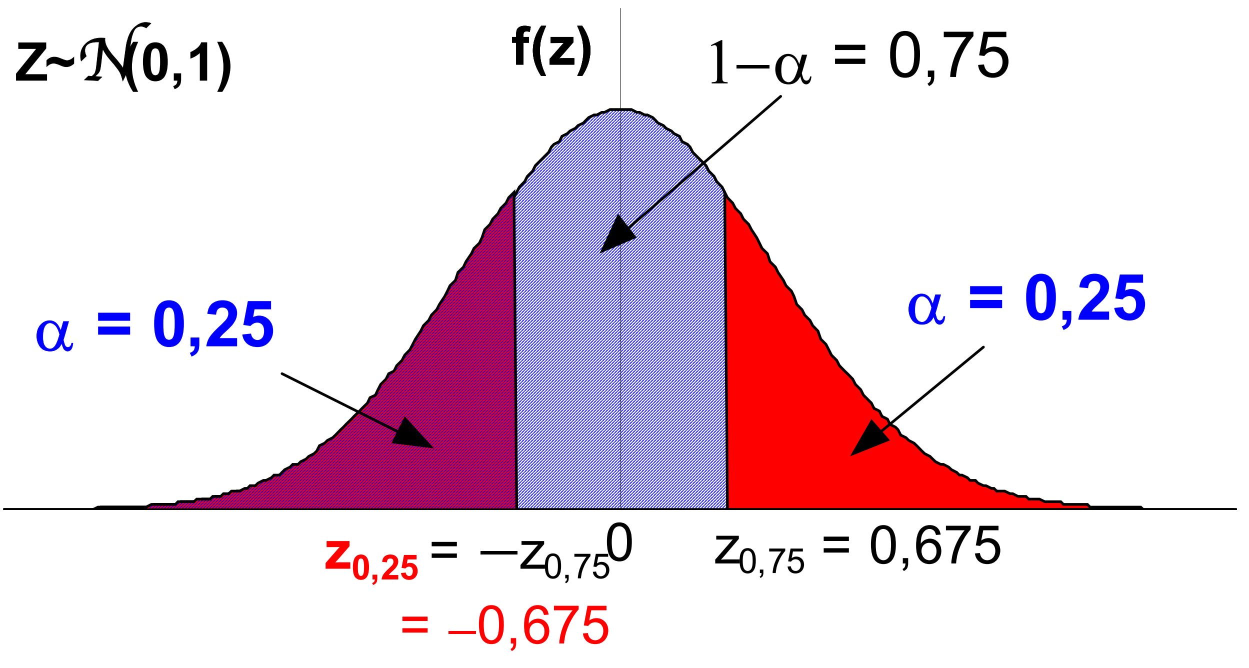


Calcul des quantiles de Z : ordre inférieur à 50% (2)

- **Exemples :**
  - **le premier quartile de Z (quantile d'ordre 0,25) : $z_{0,25}$**
    $P(Z \leq z_{0,25}) = F(z_{0,25}) = 0,25$

    $1-\alpha = 0,75$ et $z_{0,75} = 0,675$
    donc $z_{0,25} = -z_{0,75} = -0,675$

  ➔ ***25% des valeurs de Z sont* inférieures à $-$0,675**



Calcul des quantiles de Z : ordre inférieur à 50% (3)

- **Exemples :**
  - **le premier décile de Z (quantile d'ordre 0,1) : $z_{0,1}$**
    $P(Z \leq z_{0,1}) = F(z_{0,1}) = 0,1$
    $1 - \alpha = 0,9$ et $z_{0,9} = 1,28$
    donc $z_{0,1} = -z_{0,9} = -1,28$

  ➔ ***10% des valeurs de Z sont* inférieures à $-$ 1,28**

  - **le 5ème percentile de Z (quantile d'ordre 0,05) : $z_{0,05}$**
    $P(Z \leq z_{0,05}) = F(z_{0,05}) = 0,05$
    $1 - \alpha = 0,95$ et $z_{0,95} = 1,645$
    donc $z_{0,05} = -z_{0,95} = -1,645$

  ➔ ***5% des valeurs de Z sont* inférieures à $-$ 1,645**

  - **le quantile d'ordre 0,025 : $z_{0,025}$**
    $P(Z \leq z_{0,025}) = F(z_{0,025}) = 0,025$
    $1 - \alpha = 0,975$ et $z_{0,975} = 1,96$
    donc $z_{0,025} = -z_{0,975} = -1,96$

  ➔ ***2,5% des valeurs de Z sont* inférieures à $-$ 1,96**

4.2 Intervalles de variation de Z (1)

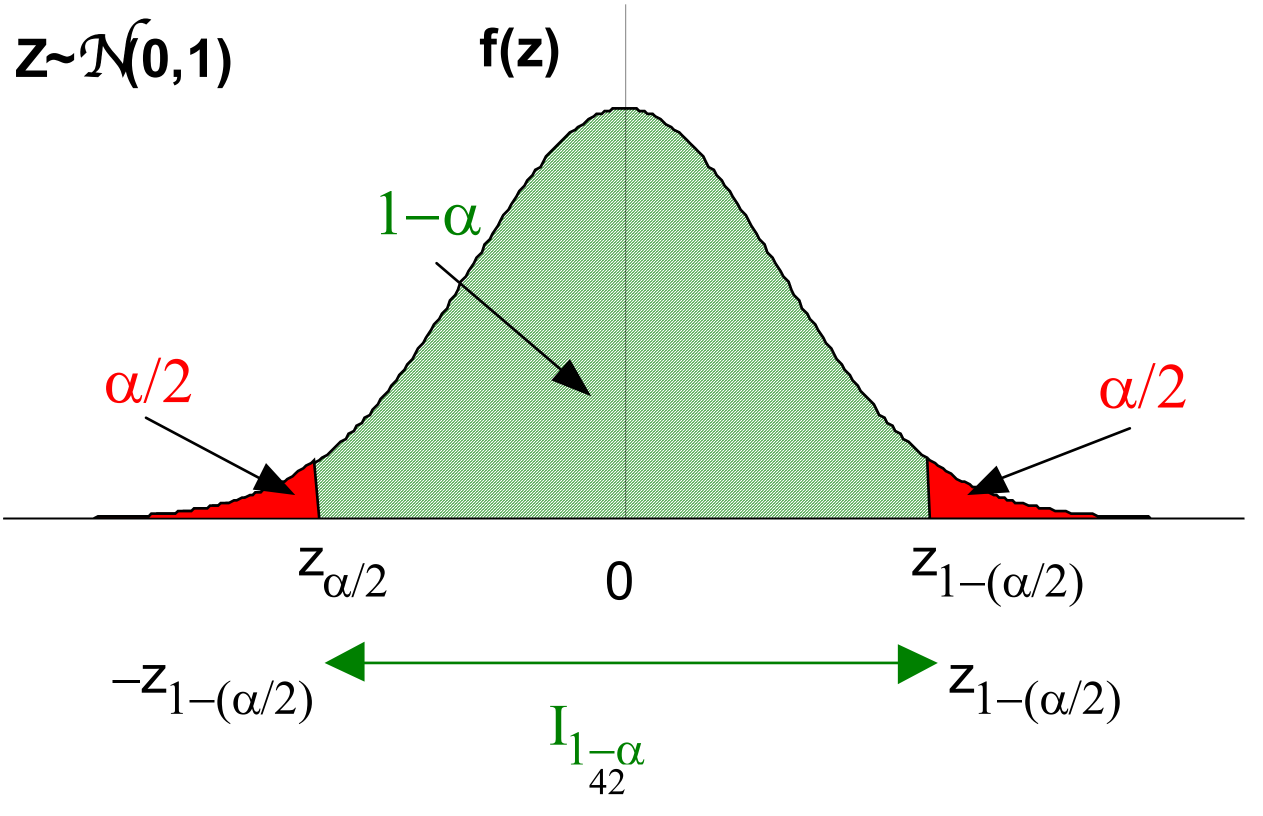
L'intervalle de variation au niveau **(1−α)** ou au risque α de **Z** noté $\mathbf{I_{1-\alpha}}$ est tel que :

$$\begin{cases} P(Z \notin I_{1-\alpha}) = \alpha \\ P(Z \in I_{1-\alpha}) = 1-\alpha \end{cases}$$

$$I_{1-\alpha} = \left[z_{\frac{\alpha}{2}} \,;\, z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = \left[-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \,;\, z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = \left[\pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

où $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de Z

Cet intervalle est symétrique autour de **0**

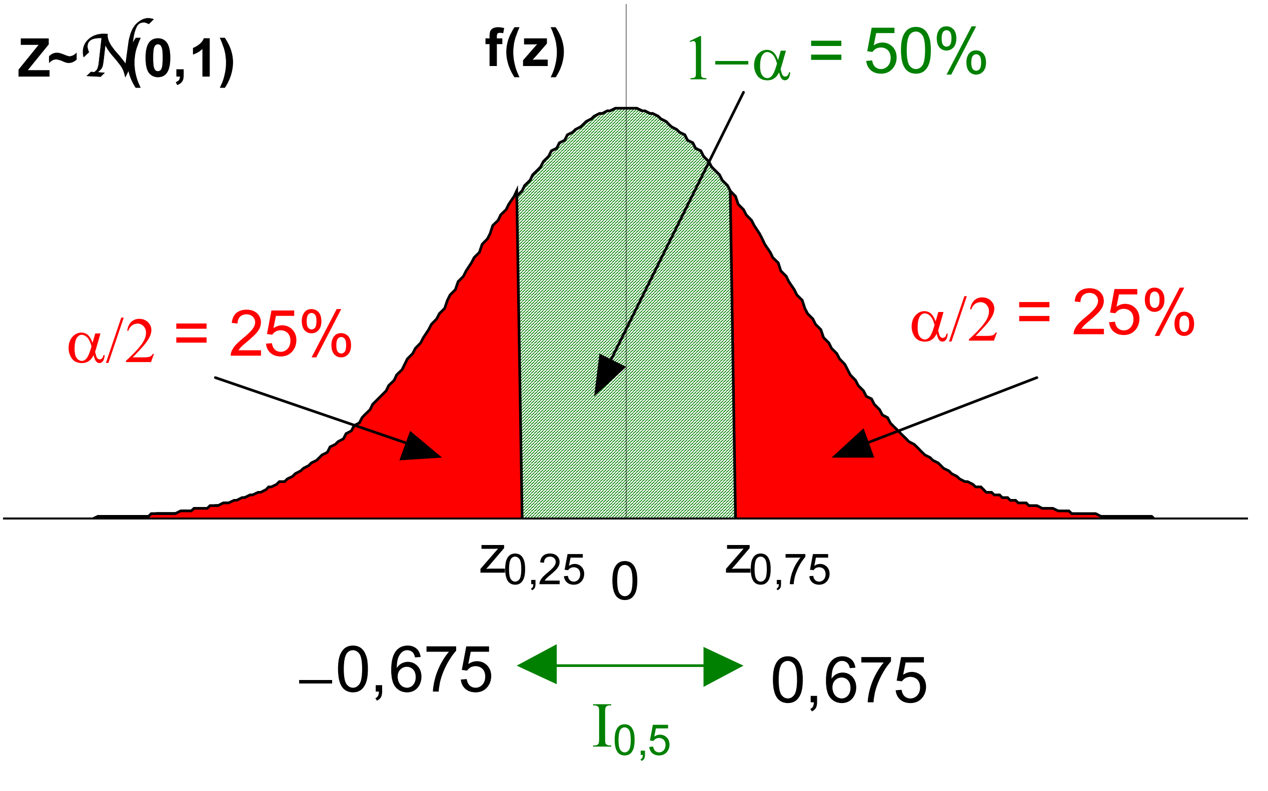


4.2 Intervalles de variation de Z (2)

- **Exemples :**
  - **intervalle de variation à 50% ou au risque α=50% ou intervalle inter-quartiles de Z :**

    $I_{0,5} = [z_{0,25}; z_{0,75}] = [-z_{0,75}; z_{0,75}]$
    $= [-0,675; 0,675] = [\pm 0,675]$

  ➔ ***50% des valeurs de Z sont comprises entre –0,675 et 0,675***



4.2 Intervalles de variation de Z (3)

- **Exemples :**
  - **intervalle de variation à 90% ou au risque α=10% de Z :**

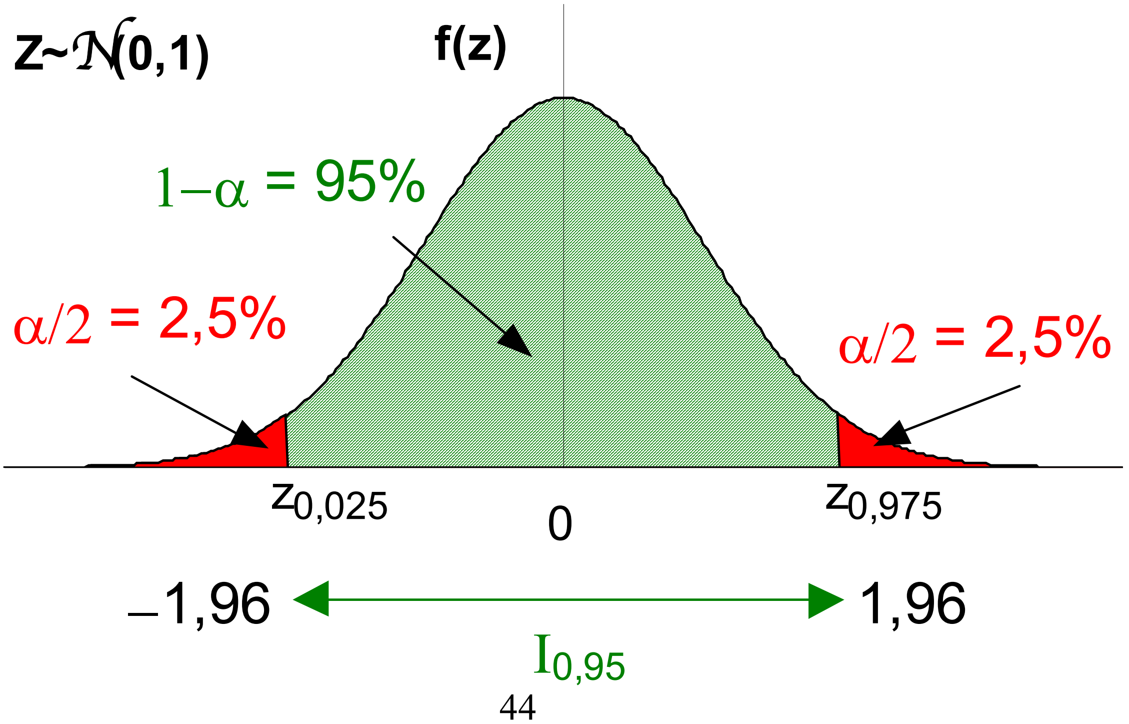
    $I_{0,90} = [z_{0,05};\ z_{0,95}\ ] = [-z_{0,95};\ z_{0,95}\ ]$
    $= [-1,645;\ 1,645\ ] = [\ \pm 1,645\ ]$

  ➔ ***90% des valeurs de Z sont comprises entre –1,645 et 1,645***

  - **intervalle de variation à 95% ou au risque α=5% de Z :**

    $I_{0,95} = [z_{0,025};\ z_{0,975}\ ] = [-z_{0,975};\ z_{0,975}\ ]$
    $= [-1,96;\ 1,96\ ] = [\ \pm 1,96\ ]$

  ➔ ***95% des valeurs de Z sont comprises entre –1,96 et 1,96***



4.3 Quantiles d'une loi normale X

X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$

Le quantile d'ordre α de **X** noté $\mathbf{x}_\alpha$
est défini pour α fixé, par :
$$\mathbf{P(X \leq x_\alpha) = F(x_\alpha) = \alpha}$$

➔ on fixe une proportion α ($0 \leq \alpha \leq 1$)
on cherche la valeur $\mathbf{x}_\alpha$ de **X** telle que
α% des valeurs de **X** sont inférieures à $\mathbf{x}_\alpha$

$\alpha = 0{,}5$: $\mathbf{x}_{0,5}$ = **médiane** de $\mathbf{X = \mu}$
car $P(X \leq \mu) = F(\mu) = 0{,}5$

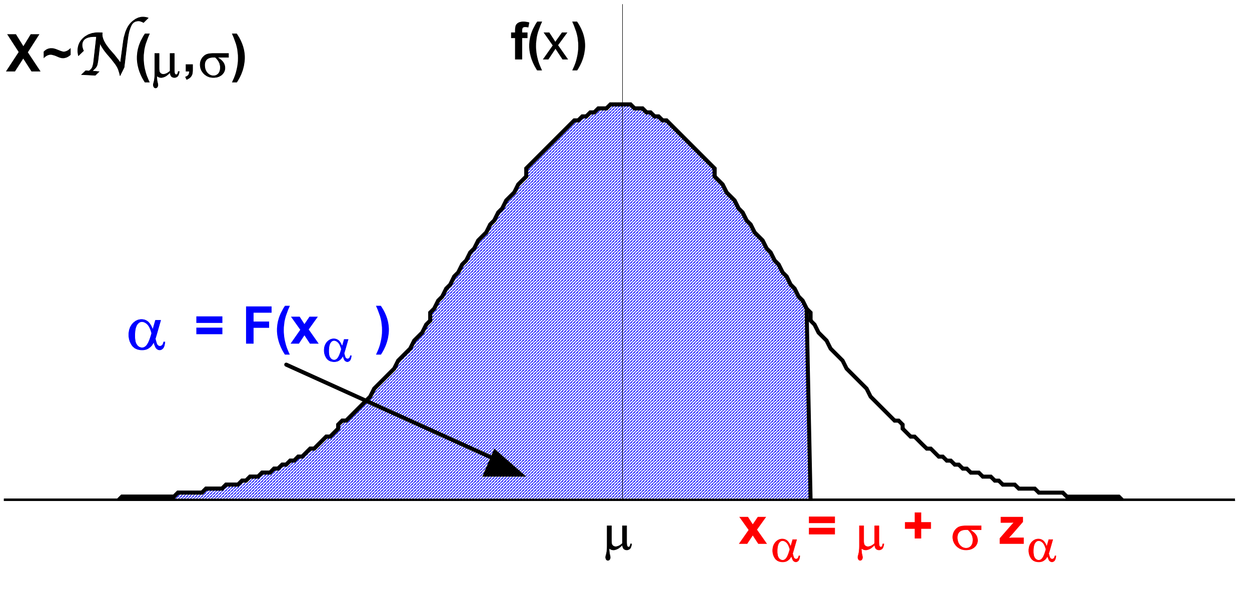
$\Rightarrow$ **moyenne = médiane = mode =** μ

Calcul des quantiles de X :

- Z variable normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

  $\Rightarrow$ la variable $X = \sigma Z + \mu$
  est une variable normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$

  $\Rightarrow$ le quantile d'ordre α de X s'écrit :
  $x_\alpha = \mu + \sigma z_\alpha$



- Pour trouver le quantile x_α d'ordre α de X :

  on détermine le quantile z_α d'ordre α de Z

  on lui applique la formule précédente

Calcul des quantiles de X : ordre supérieur à 50% (1)

- **Exemple : évaluation de l'humeur**

  X = *score d'évaluation de l'humeur*

  X ~ $\mathcal{N}$**(8,3)**

  ➢ **le troisième quartile de X (quantile d'ordre 0,75) : $x_{0,75}$**

  $P(X \leq x_{0,75}) = F(x_{0,75}) = 0,75$

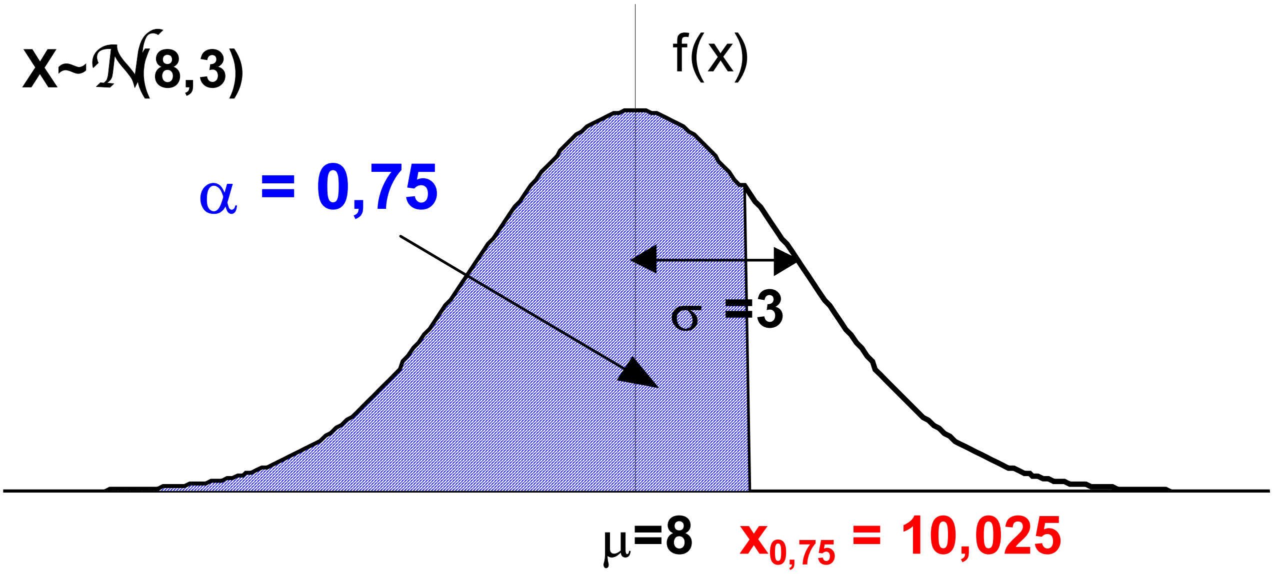
  $x_{0,75} = \mu + \sigma\, z_{0,75}$

  on sait que $\mathbf{z_{0,75}} = 0,675$

  donc $x_{0,75} = 8 + 3 \times 0,675$

  $= 8 + 2,025 = 10,025$

  ➔ ***75% des scores (valeurs de* X*) sont* inférieurs à 10,025**



Calcul des quantiles de X : ordre supérieur à 50% (2)

- **Exemple : évaluation de l'humeur**

  X = *score d'évaluation de l'humeur*

  X ~ $\mathcal{N}(8,3)$

  ➢ **le 9ème décile de X (quantile d'ordre 0,9) : $x_{0,9}$**

  $P(X \leq x_{0,9}) = F(x_{0,9}) = 0,9$

  $x_{0,9} = \mu + \sigma\, z_{0,9}$

  on sait que $\mathbf{z_{0,9}} = 1,28$

  donc $x_{0,9} = 8 + 3 \times 1,28$

  $= 8 + 3,84 = 11,84$

  → ***90% des scores (valeurs de* X) *sont* inférieurs à 11,84**

  ➢ **le 95ème percentile de X (quantile d'ordre 0,95) : $x_{0,95}$**

  $P(X \leq x_{0,95}) = F(x_{0,95}) = 0,95$

  $x_{0,95} = \mu + \sigma\, z_{0,95}$

  on sait que $\mathbf{z_{0,95}} = 1,645$

  donc $x_{0,95} = 8 + 3 \times 1,645$

  $= 8 + 4,935 = 12,935$

  → ***95% des scores (valeurs de* X) *sont* inférieurs à 12,935**

Calcul des quantiles de X : ordre inférieur à 50% (1)

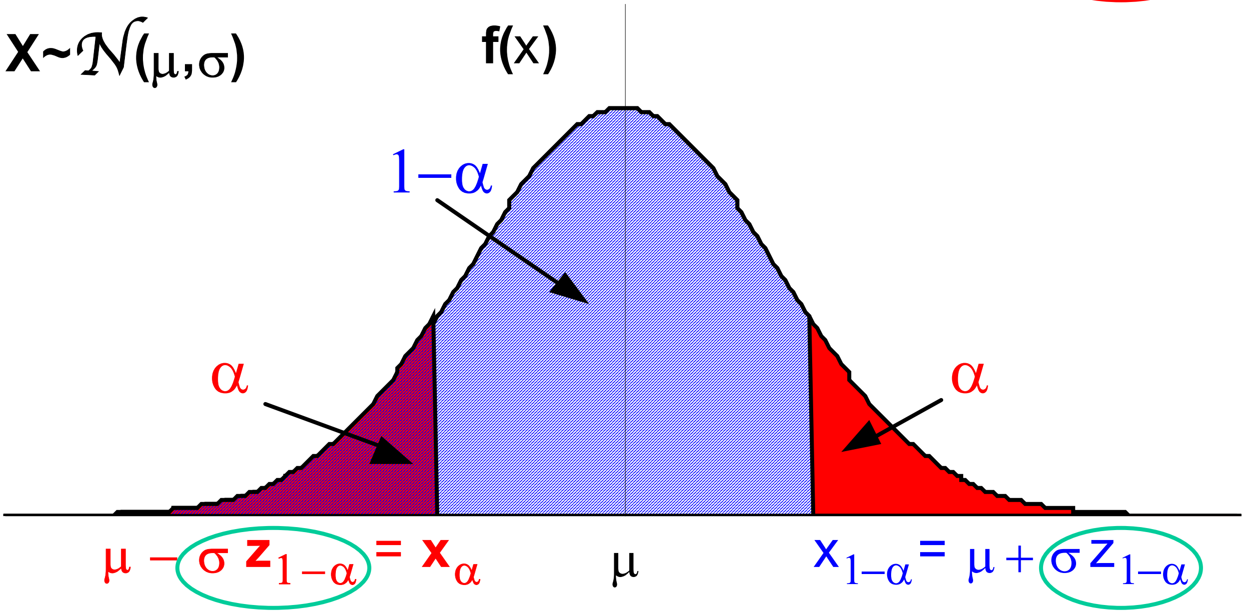
- **Pour le quantile x_α d'ordre α de X avec $\alpha < 0,5$**

$\Rightarrow$ les quantiles de $\mathbf{Z}$ d'ordre α et $\mathbf{1-\alpha}$ $\mathbf{z}_\alpha$ et $-\mathbf{z}_{1-\alpha}$ sont opposés : $\mathbf{z}_\alpha = -\mathbf{z}_{1-\alpha}$

$\Rightarrow$ le quantile d'ordre α de $\mathbf{X}$ s'écrit :

$\mathbf{x}_\alpha = \mu - \sigma\, \mathbf{z}_{1-\alpha}$

$\Rightarrow$ les quantiles de $\mathbf{X}$ d'ordre α et $\mathbf{1-\alpha}$ $\mathbf{x}_\alpha$ et $\mathbf{x}_{1-\alpha}$ sont symétriques par rapport à la moyenne μ de $\mathbf{X}$ $\begin{cases} \mathbf{x}_\alpha = \mu - \sigma\, \mathbf{z}_{1-\alpha} \\ \mathbf{x}_{1-\alpha} = \mu + \sigma\, \mathbf{z}_{1-\alpha} \end{cases}$



Calcul des quantiles de X : ordre inférieur à 50% (2)

- **Exemple : évaluation de l'humeur**

  X = *score d'évaluation de l'humeur*

  $X \sim \mathcal{N}(8,3)$

  - **le premier quartile de X (quantile d'ordre 0,25) : $x_{0,25}$**

    $P(X \leq x_{0,25}) = F(x_{0,25}) = 0,25$

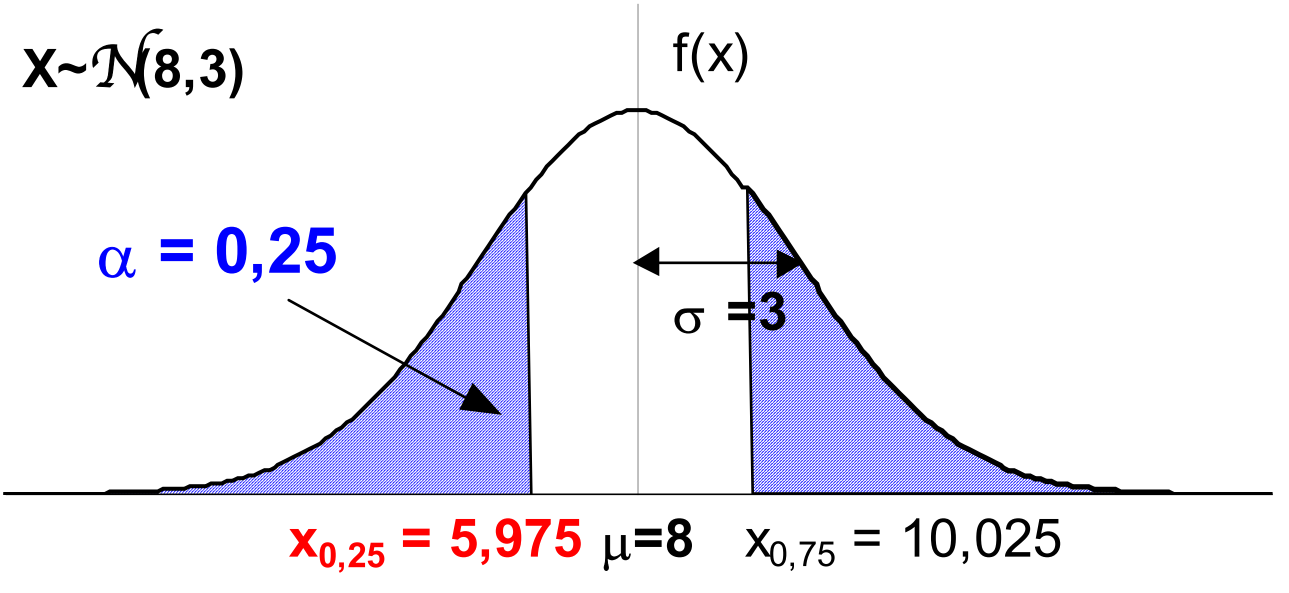
    $x_{0,25} = \mu + \sigma\, z_{0,25} = \mu - \sigma\, z_{0,75}$

    on sait que $z_{0,25} = -z_{0,75} = -0,675$

    donc $x_{0,25} = 8 - 3 \times 0,675$

    $= 8 - 2,025 = 5,975$

  → ***25% des scores (valeurs de* X*)***
  ***sont* inférieurs à 5,975**



Calcul des quantiles de X : ordre inférieur à 50% (3)

- **Exemple : évaluation de l'humeur**

  X = *score d'évaluation de l'humeur*

  X ~ $\mathcal{N}(8,3)$

➢ **le 1ème décile de X (quantile d'ordre 0,1) : $x_{0,1}$**

$P(X \leq x_{0,1}) = F(x_{0,1}) = 0,1$

$x_{0,1} = \mu + \sigma z_{0,1} = \mu - \sigma z_{0,9}$

on sait que $z_{0,1} = -z_{0,9} = -1,28$

donc $x_{0,1} = 8 - 3 \times 1,28$

$= 8 - 3,84 = 4,16$

➔ ***10% des scores (valeurs de* X*) sont* inférieurs à 4,145**

➢ **le 5ème percentile de X (quantile d'ordre 0,05) : $x_{0,05}$**

$P(X \leq x_{0,05}) = F(x_{0,05}) = 0,05$

$x_{0,05} = \mu + \sigma z_{0,05} = \mu - \sigma z_{0,95}$

on sait que $z_{0,05} = -z_{0,95} = -1,645$

donc $x_{0,05} = 8 - 3 \times 1,645$

$= 8 - 4,935 = 3,065$

➔ ***5% des scores (valeurs de* X*) sont* inférieurs à 3,065**

4.4 Intervalles de variation de X (1)

L'intervalle de variation au niveau **(1−α)** ou au risque α de **X** noté $\mathbf{I_{1-\alpha}}$ est tel que :

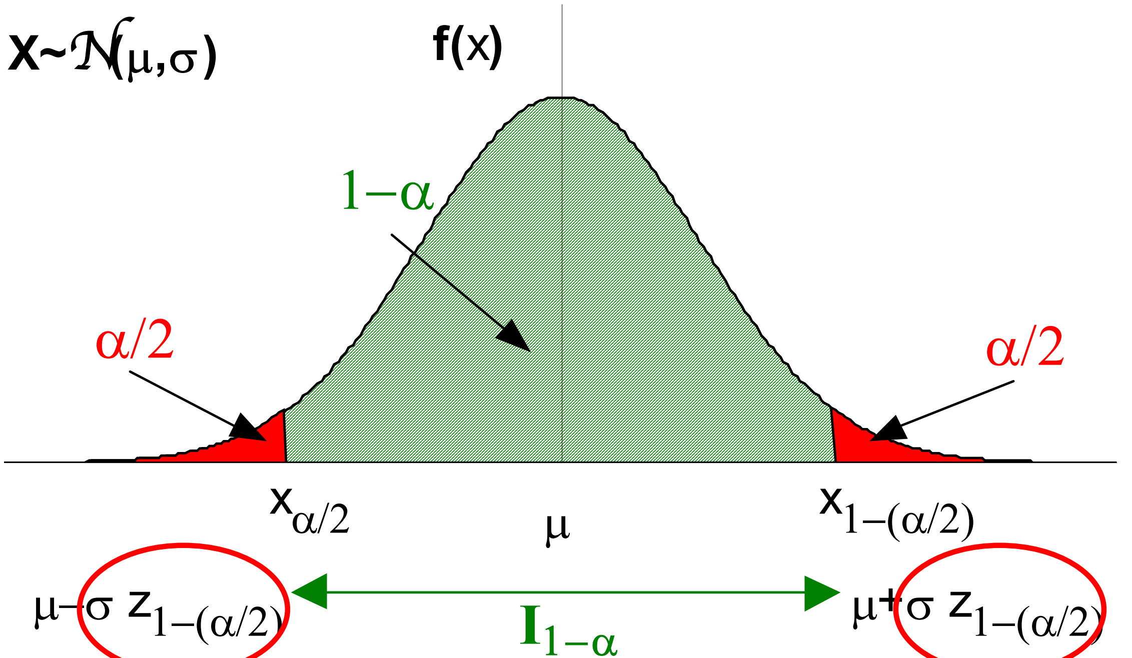
$$\begin{cases} P(X \notin I_{1-\alpha}) = \alpha \\ P(X \in I_{1-\alpha}) = 1-\alpha \end{cases}$$

$$I_{1-\alpha} = \left[x_{\frac{\alpha}{2}} \,;\, x_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = \left[\mu - \sigma z_{1-\frac{\alpha}{2}} \,;\, \mu + \sigma z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

$$I_{1-\alpha} = \left[\mu \pm \sigma z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

où $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de Z

Cet intervalle est symétrique par rapport à μ



4.4 Intervalles de variation de X (2)

- **Exemple : évaluation de l'humeur**

  X = *score d'évaluation de l'humeur*

  X **~** $\mathcal{N}(8,3)$

  - **intervalle de variation à 50% ou au risque α = 50% (intervalle inter-quartiles) de X :**

    $I_{0,5} = [x_{0,25}\,;\, x_{0,75}] = [\,\mu \pm \sigma\, z_{0,75}\,]$
    $= [8 \pm 3 \times 0{,}675] = [5{,}975;\ 10{,}025]$

  ➔ ***50% des scores (valeurs de X) sont compris entre 5,975 et 10,025***

  - **intervalle de variation à 90% ou au risque α = 10% de X :**

    $I_{0,90} = [x_{0,05}\,;\, x_{0,95}] = [\,\mu \pm \sigma\, z_{0,95}\,]$
    $= [8 \pm 3 \times 1{,}645] = [3{,}065;\ 12{,}935]$

  ➔ ***90% des scores (valeurs de X) sont compris entre 3,065 et 12,935***

4.4 Intervalles de variation de X (3)

- **Exemple : évaluation de l'humeur**

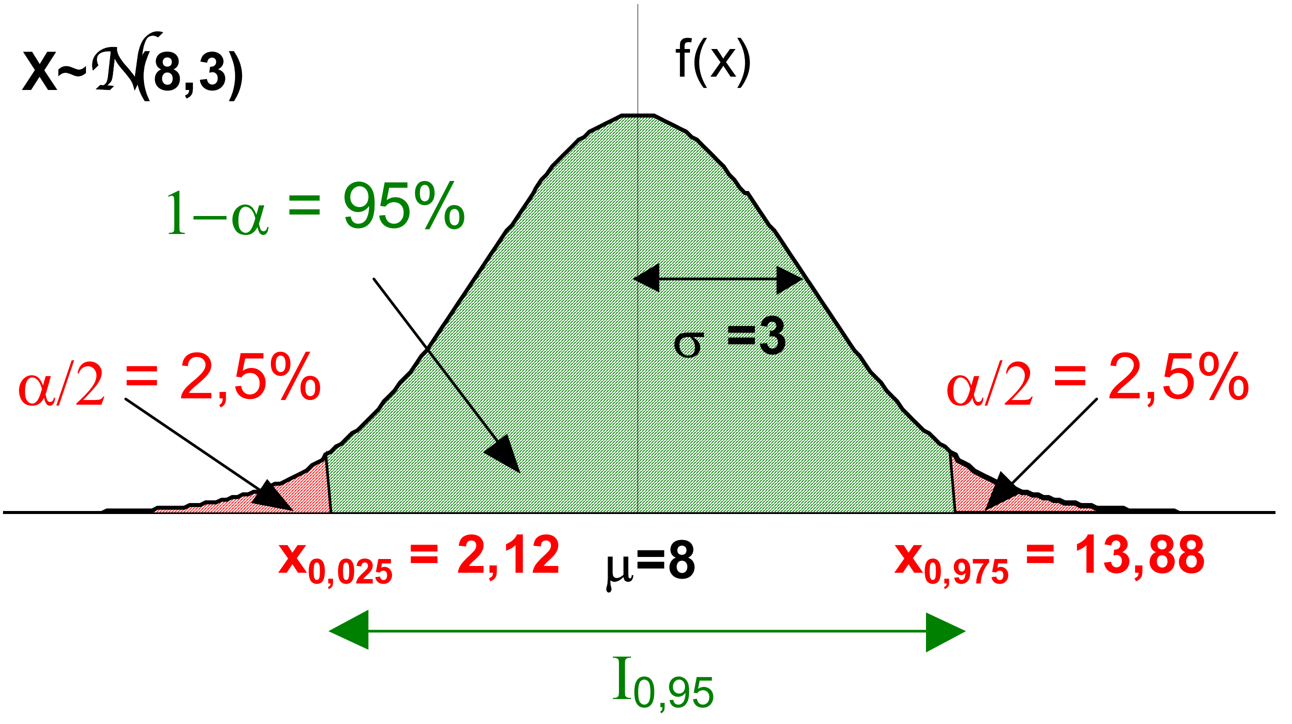
  X = *score d'évaluation de l'humeur*

  X ~ $\mathcal{N}$**(8,3)**

  ➢ **intervalle de variation à 95% ou au risque α=5% de X :**

  $$I_{0,95} = [\, x_{0,025}\, ;\, x_{0,975}\,] = [\, \mu \pm \sigma\, z_{0,975}\,]$$
  $$= [\, 8 \pm 3 \times 1,96\,] = [2,12;\ 13,88]$$

  ➔ ***95% des scores (valeurs de X) sont compris entre 2,12 et 13,88***



5. Propriété des lois normales (1)

X suit un modèle gaussien $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$

A est une valeur réelle

➢ la proportion de valeurs de **X** comprises entre $\mu - A\sigma$ et $\mu + A\sigma$ vaut :

$$
\begin{aligned}
P(\mu - A\sigma \le X \le \mu + A\sigma)& \\
&= P(-A \le Z \le A) \\
&= 2 \times F(A) - 1
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ elle dépend de **A** mais pas de μ ni de σ

5. Propriété des lois normales (2)

- **pour A=1**

  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(-1 \leq Z \leq 1)$

  $= 2\times F(1) - 1 = 0{,}6826$

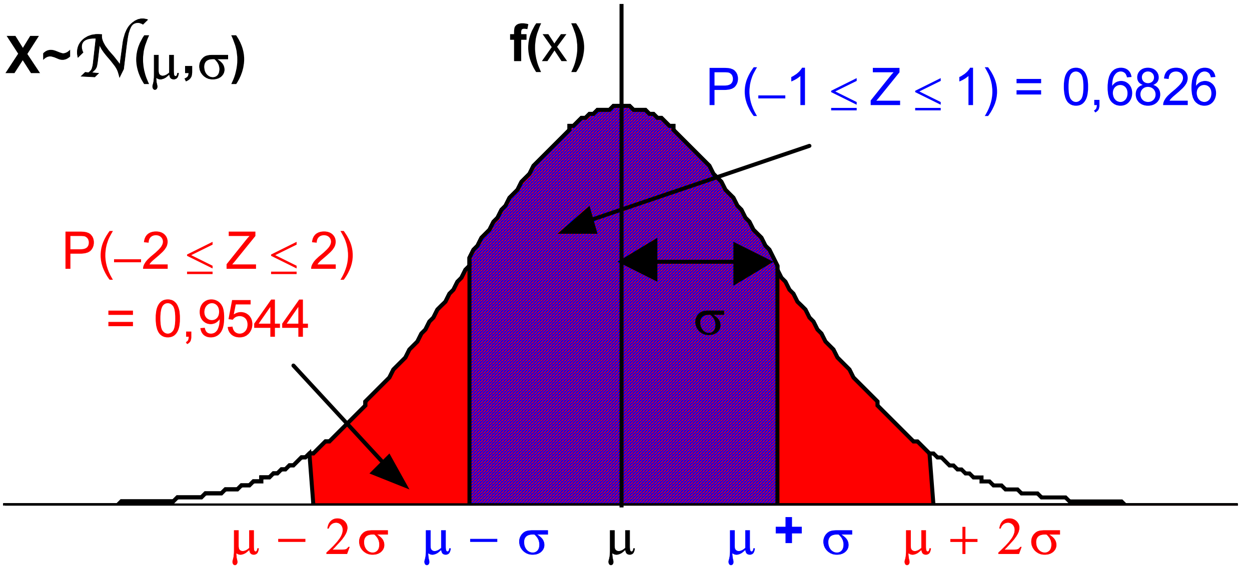
  ➔ 68,26% des valeurs de X sont comprises entre $\mu-\sigma$ et $\mu+\sigma$ (moyenne ± un écart-type)

- **pour A=2**

  $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(-2 \leq Z \leq 2)$

  $= 2\times F(2) - 1 = 0{,}9544$

  ➔ 95,44% des valeurs de X sont comprises entre $\mu-2\sigma$ et $\mu+2\sigma$
  (moyenne ± deux écart-types)



5. Propriété des lois normales (3)

- **Exemple : évaluation de l'humeur**

  X = *score d'évaluation de l'humeur*

  X **~** $\mathcal{N}$**(8,3)**

  - ***68,26% des scores (valeurs de X) sont compris entre***
    [8 ± 3] = [5 ; 11]

  - ***95,44% des scores (valeurs de X) sont compris entre***
    [8 ± 2×3] = [2 ; 14]

  - ***99,13% des scores (valeurs de X) sont compris entre***
    [8 ± 3×3]=[–1 ; 17] !!