CORRIGES DES EXERCICES : Tests de proportion et test du signe pour la médiane

Exercice 2.1

$\mathcal{P}$ ={électeurs} de taille N inconnue, X = le premier ministre fait du bon travail, variable qualitative dichotomique définie sur E={oui, non}, p proportion de "oui" **inconnue** dans $\mathcal{P}$, p_0 =50% valeur théorique fixée

Est-ce une présomption suffisante pour rejeter l'hypothèse que 50% de l'électorat pense que le premier ministre fait du bon travail ?

50% de l'électorat pense que le premier ministre fait du bon travail se traduit par : p =50% ; c'est l'hypothèse à rejeter avec un minimum de risque, donc l'hypothèse nulle, que l'on rejettera à tort au risque d'erreur maximum de α=5%. Lorsque l'alternative à tester n'est pas précisée dans l'énoncé il est sous-entendu qu'il s'agit de l'alternative complémentaire (la plus générale) l'alternative bilatérale ; elle n'est cependant pas très pertinente dans le contexte de cet exercice : on fera le test unilatéral approprié (plus simple) puis le test bilatéral demandé

hypothèse nulle $H_0 : p = p_0 = 50\%$

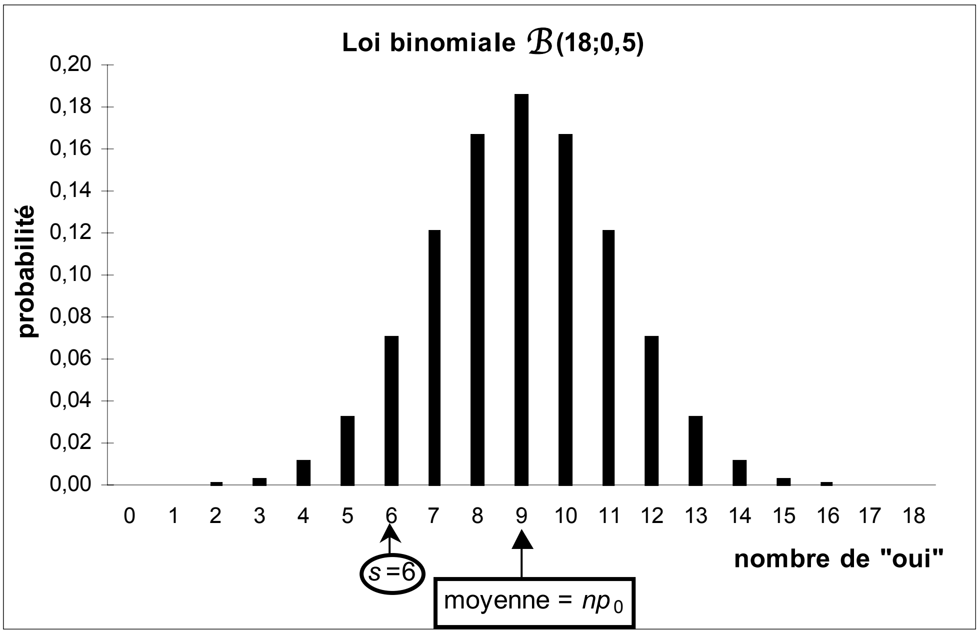
Echantillon de X issu de $\mathcal{P}$ de taille n=18 :
- l'approximation normale n'est pas possible pour les petits échantillons n =18 < 30 : on utilisera le test exact basé sur la loi binomiale pour les petits échantillons
- effectif observé de "oui" dans l'échantillon s=6 donc estimation ponctuelle de p par f fréquence observée de "oui" dans l'échantillon f=6/18=1/3≈0,333=33,3%

Comparaison de la proportion *p inconnue* à la valeur théorique p_0=50%=0,5 : test binomial

- loi de la statistique de test sous l'hypothèse nulle

sous $H_0 : p = p_0 = 0,5$
la statistique de test S_n effectif empirique de "oui", quantitative discrète définie sur $\{0, \ldots, n\}=\{0, \ldots, 18\}$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_0) = \mathcal{B}(18; 0,5)$ symétrique, de moyenne $np_0 = 18\times0,5 = n/2 = 9$ et de variance $np_0(1-p_0) = 18\times0,5^2 = n/4 = 4,5$ dont la fonction de répartition est donnée dans la table 1

	$S_n \sim \mathcal{B}$ (18; 0,5)	
s	$P(S_n = s)$	$P(S_n \leq s)$
0	0,0000	0,0000
1	0,0001	0,0001
2	0,0006	0,0007
3	0,0031	0,0038
4	0,0117	0,0154
5	0,0327	0,0481
6	0,0708	0,1189
7	0,1214	0,2403
8	0,1669	0,4073
9	0,1855	0,5927
10	0,1669	0,7597
11	0,1214	0,8811
12	0,0708	0,9519
13	0,0327	0,9846
14	0,0117	0,9962
15	0,0031	0,9993
16	0,0006	0,9999
17	0,0001	1,0000
18	0,0000	1,0000

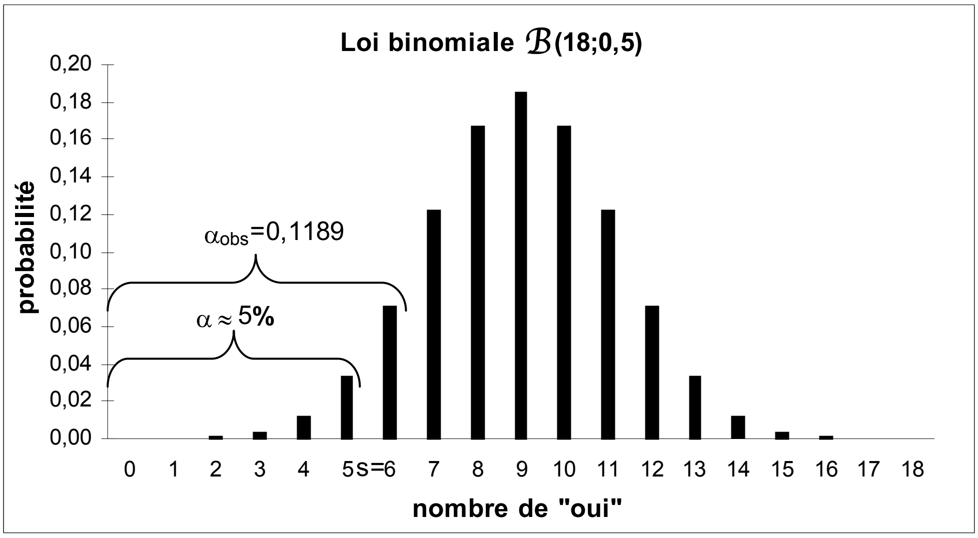


❶ ***Test unilatéral gauche***

hypothèse nulle $H_0 : p = p_0 = 50\%$
hypothèse alternative $H_1 : p < p_0 = 50\%$ unilatérale gauche, au risque α=5%

- degré de signification du test unilatéral gauche (région de rejet unilatérale gauche)

le degré de signification est la probabilité sous H_0 d'observer une valeur de la statistique de test S_n au plus égale à la valeur s=6 observée car sous $H_1 : p < p_0 = 50\%$ les valeurs de S_n ont tendance à être "très" inférieures à la moyenne $np_0 = 9$, donc on prendra le risque de conclure H_1 (rejeter H_0 en faveur de H_1) à tort pour les "petites" valeurs de S_n



$\alpha_{obs} = P_{H_0}(S_n \leq s) = P_{H_0}(S_n \leq 6) = F_{\mathcal{B}}(6) = 0{,}1189$

où $F_{\mathcal{B}}$ fonction de répartition de la loi $\mathcal{B}$(18; 0,5) donnée dans la table 1 (ligne n=18 colonne k=6)

- décision

$\alpha_{obs} = 0{,}1189 > \alpha = 5\%$
$\Rightarrow$ on ne rejette pas H_0 au seuil de signification α=5% et au risque d'erreur de seconde espèce β inconnu ; le test n'est pas significatif au seuil α=5% et au risque β

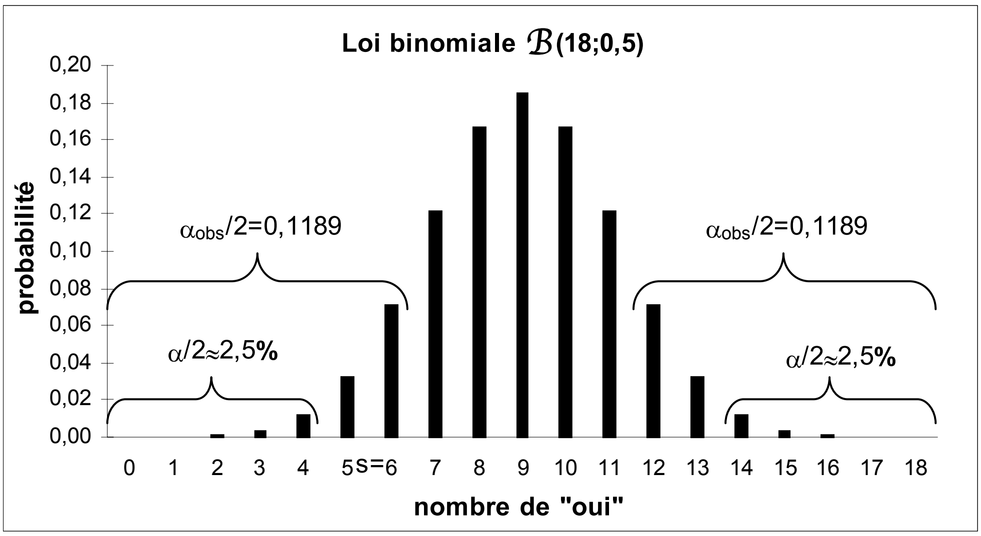
- conclusion

la proportion p d'électeurs qui pensent que le premier ministre fait du bon travail n'est pas significativement inférieure à 50% au seuil α=5% et au risque β inconnu

❷ ***Test bilatéral***

hypothèse nulle $H_0 : p = p_0 = 50\%$
hypothèse alternative $H_1 : p \neq p_0 = 50\%$ bilatérale, au risque α=5%

- degré de signification du test bilatéral (région de rejet bilatérale)



Le degré de signification est la probabilité sous H_0 d'observer une valeur extrême de la statistique de test S_n c'est-à-dire soit au plus égale à la valeur s=6 observée, soit au moins égale à la valeur $n-s$=18−6=12 (symétrique de s par rapport à $np_0 = 9$) car sous $H_1 : p \neq p_0 = 50\%$ on s'attend à avoir des valeurs de S_n soit "très" inférieures soit "très" supérieures à la moyenne $np_0 = 9$, donc on prendra le risque de conclure H_1 (rejeter H_0 en faveur de H_1) à tort pour les "petites" valeurs de S_n et pour les "grandes" valeurs de S_n

Puisque la valeur observée de S_n est inférieure à la moyenne ($s=6 \leq np_0=9$)

$$\alpha_{obs} = P_{H_0}(S_n \leq s) + P_{H_0}(S_n \geq n-s) = 2\times P_{H_0}(S_n \leq \min(s, n-s))$$

$$= P_{H_0}(S_n \leq 6) + P_{H_0}(S_n \geq 12) = 2\times P_{H_0}(S_n \leq 6) = 2\times F_{\mathcal{B}}(6)$$

où $F_{\mathcal{B}}$ fonction de répartition de la loi $\mathcal{B}(18; 0,5)$ donnée dans la table 1

$\alpha_{obs} = 2\times0,1189 = 0,2378$ table 1 ligne n=18 colonne k=6

- décision

$\alpha_{obs} = 0,2378 > \alpha=5\%$

$\Rightarrow$ on ne rejette pas H_0 au seuil de signification α=5% et au risque d'erreur de seconde espèce β inconnu ; le test n'est pas significatif au seuil α=5% et au risque β

- conclusion

la proportion p d'électeurs qui pensent que le premier ministre fait du bon travail n'est pas significativement différente de 50% au seuil α=5% et au risque β inconnu ; ce n'est pas une présomption suffisante pour rejeter l'hypothèse que 50% de l'électorat pense que le premier ministre fait du bon travail au seuil α=5% et au risque β inconnu

- remarque

pour la même proportion observée (f =1/3) le test (unilatéral ou bilatéral) n'est pas significatif sur un échantillon de taille n=18 alors qu'il l'est (unilatéral ou bilatéral) sur un échantillon de taille beaucoup plus grande n=225 (cf exercice 1.3) : la puissance du test augmente avec la taille de l'échantillon

Exercice 2.2

$\mathcal{P}$ ={couples d'électeurs} de taille N inconnue, X = voter pour le même candidat lors d'une élection présidentielle, variable qualitative dichotomique définie sur E={oui, non}, p = proportion de "oui" = proportion de couples votant pour le même candidat, **inconnue** dans $\mathcal{P}$

Peut-on conclure, au risque 1%, que dans la majorité des couples, les époux votent pour le même candidat lors d'une élection présidentielle ?

Dans la majorité (plus de 50%) des couples, les époux votent pour le même candidat se traduit par : $p > 50\%$; c'est l'hypothèse à accepter avec un minimum de risque, donc l'hypothèse alternative, que l'on acceptera à tort au risque d'erreur maximum de α=1%

hypothèse nulle $H_0 : p = p_0 = 50\%$
hypothèse alternative $H_1 : p > p_0 = 50\%$ unilatérale, au risque α=1%

Echantillon de X issu de $\mathcal{P}$ de taille n=20 <30 donc l'approximation normale n'est pas possible : on utilisera le test exact basé sur la loi binomiale pour les petits échantillons

Comparaison de la proportion p inconnue à la valeur théorique p_0=50%=0,5 : test binomial

- statistique de test

le test est basé sur la statistique S_n
S_n = effectif empirique de "oui" = effectif empirique de couples votant pour le même candidat = effectif variable de couples votant pour le même candidats sur les échantillons de taille n,
S_n variable quantitative discrète définie sur {0, … n} = {0, … 20}

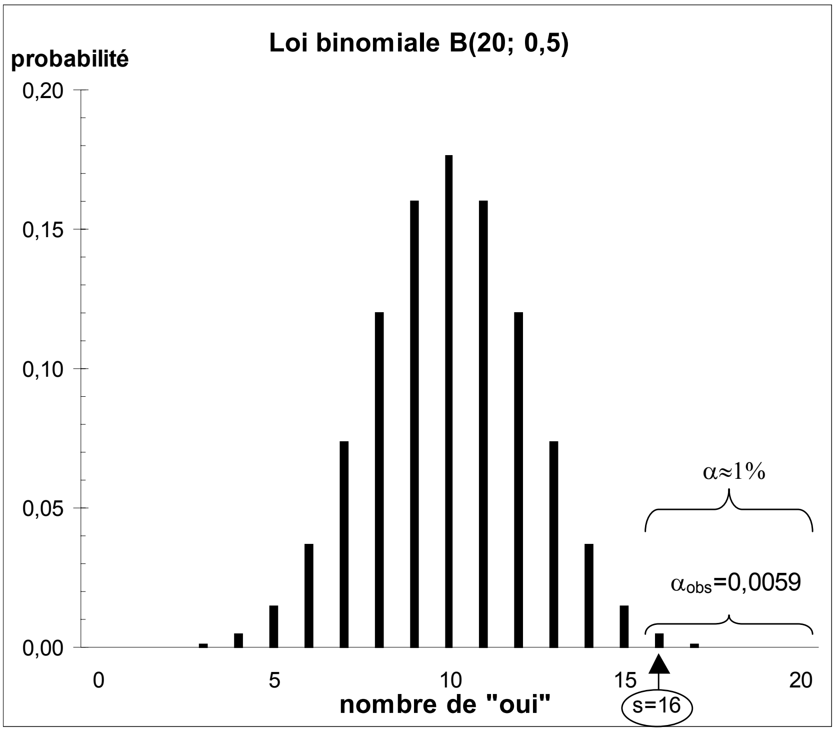
- valeur observée de la statistique de test

s = effectif observé de "oui" dans l'échantillon = 16
(donc estimation ponctuelle de p par f fréquence observée de "oui" dans l'échantillon f=16/20=4/5=0,8=80%)

- loi exacte de la statistique de test sous l'hypothèse nulle

sous $H_0 : p = p_0 = 0,5$ la statistique de test S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_0) = \mathcal{B}(20; 0,5)$ quantitative discrète définie sur {0, … 20} symétrique, de moyenne $np_0 = n/2 = 20\times0,5 = 10$ et de variance $np_0(1-p_0) = n/4 = 20\times0,5\times0,5 = 5$ dont la fonction de répartition est donnée dans la table 1

	$S_n \sim \mathcal{B}$ (20; 0,5)	
s	$P(S_n = s)$	$P(S_n \leq s)$
0	0,0000	0,0000
1	0,0000	0,0000
2	0,0002	0,0002
3	0,0011	0,0013
4	0,0046	0,0059
5	0,0148	0,0207
6	0,0370	0,0577
7	0,0739	0,1316
8	0,1201	0,2517
9	0,1602	0,4119
10	0,1762	0,5881
11	0,1602	0,7483
12	0,1201	0,8684
13	0,0739	0,9423
14	0,0370	0,9793
15	0,0148	0,9941
16	0,0046	0,9987
17	0,0011	0,9998
18	0,0002	1,0000
19	0,0000	1,0000
20	0,0000	1,0000



- région de rejet du test unilatéral droit

sous H_1 : $p > p_0$ = 0,5 les valeurs de la statistique de test S_n ont tendance à être supérieures à la moyenne $np_0 = 10$

la région de rejet est donc située à droite du domaine de variation de S_n (du côté des "grandes" valeurs de S_n)

- degré de signification du test unilatéral droit

c'est la probabilité d'observer une valeur de la statistique de test S_n supérieure à (à droite de) la valeur s observée

$\alpha_{obs} = P_{H_0}(S_n \geq s) = P_{H_0}(S_n \geq 16)$

$\alpha_{obs} = 1 - P_{H_0}(S_n \leq 15) = 1 - F_{\mathcal{B}}(15) = 1 - 0{,}9941 = 0{,}0059$ (table 1 ligne n=20 colonne k=15)

ou par symétrie de la loi de S_n : $\alpha_{obs} = P_{H_0}(S_n \leq n-s) = P_{H_0}(S_n \leq 4) = F_{\mathcal{B}}(4) = 0{,}0059$ (table 1 ligne n=20 colonne k=4) où $F_{\mathcal{B}}$ est la fonction de répartition de la loi binomiale $\mathcal{B}$(20;0,5)

- décision

$\alpha_{obs} = 0{,}0059 < \alpha = 1\% \Rightarrow$ on rejette H_0 au risque α=1%

- conclusion

la proportion p de couples qui votent pour le même candidat est significativement supérieure à 50% au risque α=5% c'est à dire que la majorité des couples votent pour le même candidat lors d'une élection présidentielle

Exercice 2.3

$\mathcal{P}$ ={parents (père et mère) d'enfants handicapés mentalement} de taille N inconnue,
X = mieux appréhender les problèmes potentiels, variable qualitative dichotomique définie sur E={Père, Mère}

Peut-on au risque α=5%, accepter l'hypothèse les pères appréhendent généralement mieux la situation de leur enfant handicapé ?

X = le père appréhende mieux les problèmes potentiels, variable qualitative dichotomique définie sur E={oui, non},
p = proportion de "oui" = proportion de pères appréhendant mieux les problèmes potentiels, **inconnue** dans $\mathcal{P}$

Les pères appréhendent généralement mieux la situation de leur enfant handicapé se traduit par : $p > 50\%$; c'est l'hypothèse à accepter avec un minimum de risque, donc l'hypothèse alternative, que l'on acceptera à tort au risque d'erreur maximum de α=5%

hypothèse nulle $\quad H_0 : p = p_0 = 50\%$
hypothèse alternative $\quad H_1 : p > p_0 = 50\%$ unilatérale, au risque α=5%

Echantillon de X issu de $\mathcal{P}$ de taille n=17 <30 donc l'approximation normale n'est pas possible : on utilisera le test exact basé sur la loi binomiale pour les petits échantillons

Comparaison de la proportion p inconnue à la valeur théorique p_0=50%=0,5 : test binomial

- statistique de test

le test est basé sur la statistique S_n
S_n = effectif empirique de "oui" = effectif empirique de couples votant pour le même candidat = effectif variable de couples votant pour le même candidats sur les échantillons de taille n,
S_n variable quantitative discrète définie sur $\{0, \ldots n\} = \{0, \ldots 17\}$

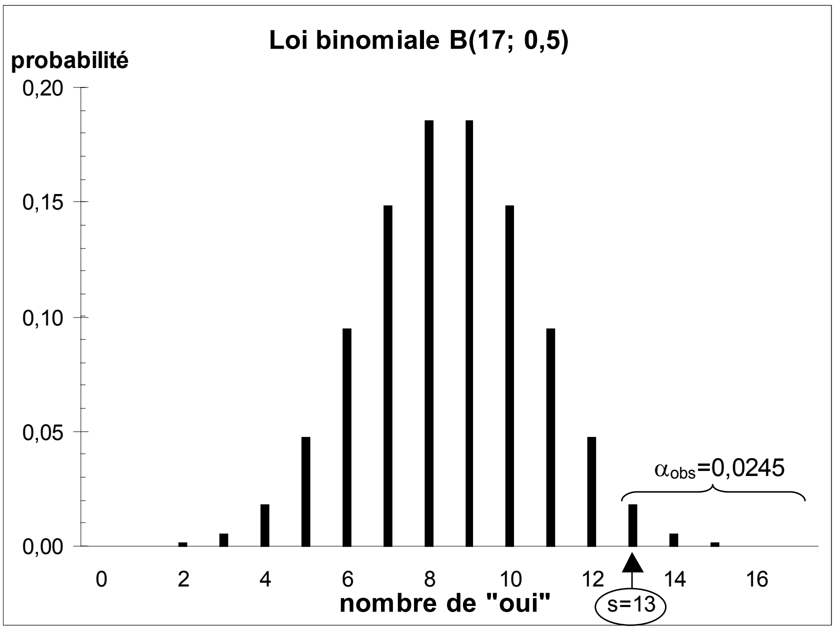
- valeur observée de la statistique de test

s = effectif observé de "oui" dans l'échantillon = 13
(donc estimation ponctuelle de p par f fréquence observée de "oui" dans l'échantillon f=13/17=0,765=76,5%)

- loi exacte de la statistique de test sous l'hypothèse nulle

sous $H_0 : p = p_0 = 0,5$ la statistique de test S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_0) = \mathcal{B}(17; 0,5)$ quantitative discrète définie sur {0, … 17} symétrique, de moyenne $np_0 = n/2 = 17\times0,5 = 8,5$ et de variance $np_0(1-p_0) = n/4 = 17\times0,5\times0,5 = 4,25$ dont la fonction de répartition est donnée dans la table 1

	$S_n \sim \mathcal{B}$ (17; 0,5)	
s	$P(S_n = s)$	$P(S_n \leq s)$
0	0,0000	0,0000
1	0,0001	0,0001
2	0,0010	0,0012
3	0,0052	0,0064
4	0,0182	0,0245
5	0,0472	0,0717
6	0,0944	0,1662
7	0,1484	0,3145
8	0,1855	0,5000
9	0,1855	0,6855
10	0,1484	0,8338
11	0,0944	0,9283
12	0,0472	0,9755
13	0,0182	0,9936
14	0,0052	0,9988
15	0,0010	0,9999
16	0,0001	1,0000
17	0,0000	1,0000



- région de rejet du test unilatéral droit

sous H_1 : $p > p_0$ = 0,5 les valeurs de la statistique de test S_n ont tendance à être supérieures à la moyenne $np_0 = 8{,}5$

la région de rejet est donc située à droite du domaine de variation de S_n (du côté des "grandes" valeurs de S_n)

- degré de signification du test unilatéral droit

c'est la probabilité d'observer une valeur de la statistique de test S_n supérieure à (à droite de) la valeur s observée

$\alpha_{obs} = P_{H_0}(S_n \geq s) = P_{H_0}(S_n \geq 13)$

$\alpha_{obs} = 1 - P_{H_0}(S_n \leq 12) = 1 - F_{\mathcal{B}}(12) = 1 - 0{,}9755 = 0{,}0245$ (table 1 ligne n=17 colonne k=12)

ou par symétrie de la loi de S_n : $\alpha_{obs} = P_{H_0}(S_n \leq n-s) = P_{H_0}(S_n \leq 4) = F_{\mathcal{B}}(4) = 0{,}0245$ (table 1 ligne n=17 colonne k=4) où $F_{\mathcal{B}}$ est la fonction de répartition de la loi binomiale $\mathcal{B}(17;0{,}5)$

- décision

$\alpha_{obs} = 0{,}0245 < \alpha = 5\% \Rightarrow$ on rejette H_0 au risque α=5%

- conclusion

la proportion p de pères qui appréhendent mieux les problèmes potentiels est significativement supérieure à 50% au risque α=5% c'est à dire que les pères appréhendent généralement mieux la situation de leur enfant handicapé

Exercice 2.4

$\mathcal{P}$ ={personnes suivant le régime pendant deux mois} de taille N inconnue, X = perte de poids (en kg), variable quantitative de médiane M **inconnue** dans $\mathcal{P}$; M_0 valeur théorique donnée par la publicité **connue** : M_0=5 kg

La publicité est-elle mensongère au risque α=5% ?

La publicité est mensongère se traduit par le fait que **la perte de poids médiane** est en réalité inférieure à celle énoncée par la publicité, c'est à dire **inférieure à 5kg** : ce sera l'hypothèse à accepter avec un minimum de risque, donc l'hypothèse alternative, que l'on acceptera à tort au risque d'erreur maximum de α=5%

Comparaison de la médiane *M inconnue* à la valeur théorique M_0=5

hypothèse nulle H_0 : "la perte de poids médiane M dans $\mathcal{P}$ est égale à celle donnée par la publicité" s'écrit $H_0 : M = M_0 = 5$

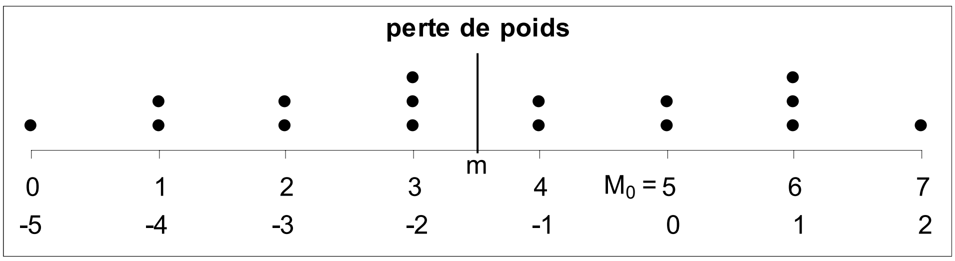
hypothèse alternative H_1 : "la perte de poids médiane M dans $\mathcal{P}$ est inférieure à celle donnée par la publicité" $H_1 : M < M_0 = 5$ unilatérale gauche, au risque α=5%

❶ Comparaison d'une médiane à une valeur théorique : test du signe pour la médiane

personne	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
perte de poids X	4	6	3	1	2	5	4	0	3	6	3	1	7	2	5	6
rang(X)	9	14	8	3	4	12	10	1	7	13	6	2	16	5	11	15
D=X–5	–1	1	–2	–4	–3	0	–1	–5	–2	1	–2	–4	2	–3	0	1
signe(D)	–	+	–	–	–	0	–	–	–	+	–	–	+	–	0	+

pour n pair la médiane observée m de X est égale à toute valeur comprise entre la $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{ème}}$ et la $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{ème}}$ valeur ordonnée de X, c'est à dire de rang $\left(\frac{n}{2}\right)$ et $\left(\frac{n}{2}+1\right)$; on choisit en général le milieu de ces deux valeurs

pour n=16 la médiane m se trouve entre la $8^{\text{ème}}$ et la $9^{\text{ème}}$ valeur ordonnée de X donc entre les valeurs de rang 8 et 9 : m se situe entre 3 et 4 kg



La variable *signe*(D) où $D=X-M_0=X-5$, est qualitative dichotomique définie sur E={positif, négatif}, p proportion de signes strictement positifs **inconnue** dans $\mathcal{P}$

Comparaison de la proportion p *inconnue* à la valeur théorique $p_0=50\%=0{,}5$

hypothèse nulle $H_0 : M = M_0=5$ s'écrit $H_0 : p = p_0= 0{,}5$

hypothèse alternative $H_1 : M < M_0=5$ s'écrit $H_1 : p < p_0 =0{,}5$ unilatérale gauche, au risque $\alpha=5\%$

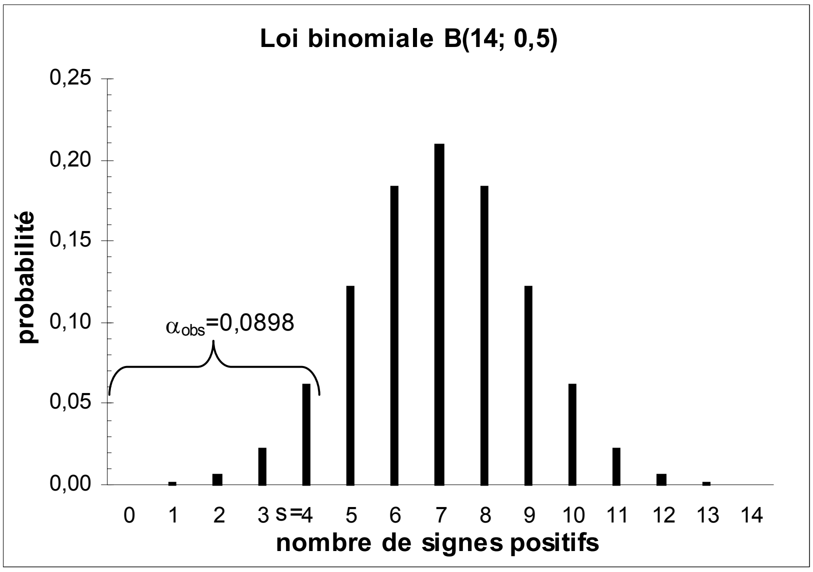
Echantillon de X issu de $\mathcal{P}$ de taille $n=16-2=14$ (nombre de valeurs de D non nulles) : estimation ponctuelle de p par f fréquence observée de signes strictement positifs dans l'échantillon où $s=4$ donc $f = 4/14 = 0{,}286$

- loi de la statistique de test sous l'hypothèse nulle

sous $H_0 : p = p_0 = 0{,}5$

la statistique de test S_n effectif empirique de signes strictement positifs, quantitative discrète définie sur $\{0, \ldots, n\} = \{0, \ldots, 14\}$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_0) = \mathcal{B}(14; 0{,}5)$ symétrique, de moyenne $np_0 = 14\times0{,}5 = 7$

	$S_n \sim\mathcal{B}$ (14; 0,5)	
s	$P(S_n=s)$	$P(S_n\leq s)$
0	0,0001	0,0001
1	0,0009	0,0009
2	0,0056	0,0065
3	0,0222	0,0287
4	0,0611	0,0898
5	0,1222	0,2120
6	0,1833	0,3953
7	0,2095	0,6047
8	0,1833	0,7880
9	0,1222	0,9102
10	0,0611	0,9713
11	0,0222	0,9935
12	0,0056	0,9991
13	0,0009	0,9999
14	0,0001	1,0000



- degré de signification du test unilatéral gauche (région de rejet à gauche du domaine de variation de S_n***)***

le degré de signification est la probabilité sous H_0 d'observer une valeur de la statistique de test S_n au plus égale à la valeur $s=4$ observée car sous H_1 on attend "peu" de valeurs de D positives, donc on prendra le risque de conclure H_1 (rejeter H_0 en faveur de H_1) à tort pour les "petites" valeurs de S_n

$\alpha_{obs} = P_{H_0}(S_n \leq s) = P_{H_0}(S_n \leq 4) = F_{\mathcal{B}}(4) = 0{,}0898$

où $F_{\mathcal{B}}$ fonction de répartition de la loi $\mathcal{B}(14; 0{,}5)$ donnée dans la table 1 (ligne $n=14$ colonne $k=4$)

- décision

$\alpha_{obs} = 0{,}0898 > \alpha=5\%$

$\Rightarrow$ on ne rejette pas H_0 au seuil de signification $\alpha=5\%$ et au risque d'erreur de seconde espèce β inconnu ; le test n'est pas significatif au seuil $\alpha=5\%$ et au risque β

- conclusion

la proportion p de signes positifs de la différence de X à la valeur théorique (M_0 =) 5 kg n'est pas significativement inférieure à 50%, au risque $\alpha=5\%$; donc la perte de poids médiane des personnes sous régime pendant deux mois n'est pas significativement inférieure à celle de 5 kg donnée par la publicité, au seuil $\alpha=5\%$ et au risque β inconnu ; il n'est donc pas raisonnable de penser que la publicité est mensongère au seuil $\alpha=5\%$ et au risque β inconnu

- remarque

conclusion non significative également pour le test bilatéral de $H_0 : M = M_0=5$ contre $H_1 : M \neq M_0 =5$ au risque $\alpha=5\%$, car $\alpha_{obs} = 2\times0{,}0898 =0{,}1796 > \alpha=5\%$; la proportion p de signes positifs de la différence de X à la valeur théorique M_0 n'est pas significativement différente de 50%, au risque $\alpha=5\%$; donc la perte de poids médiane des personnes sous régime pendant deux mois n'est pas significativement différente de celle de 5 kg donnée par la publicité, au seuil $\alpha=5\%$ et au risque β inconnu

❷ Comparaison d'une médiane à une valeur théorique : test de Wilcoxon (signes et rangs)

On suppose que la perte de poids X est symétrique dans $\mathcal{P}$ (par rapport à sa médiane *M*)

personne	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
perte de poids X	4	6	3	1	2	5	4	0	3	6	3	1	7	2	5	6
D=X−5	−1	1	−2	−4	−3	0	−1	−5	−2	1	−2	−4	2	−3	0	1
signe(D)	−	+	−	−	−	0	−	−	−	+	−	−	+	−	0	+
rang(|D|)	3	3	7,5	12,5	10,5		3	14	7,5	3	7,5	12,5	7,5	10,5		3

Echantillon de D où $D=X-M_0=X-5$ de taille $n=16-2=14$ (nombre de valeurs de D non nulles)

Statistiques de test V^+ somme des rangs de |D| associés aux valeurs positives de D, et V^- :

somme $V^+ + V^- = 14\times15/2 = 105$

ex æquo : $|d_i|=1$ $r=1$ $k=5$ $r_m=1+(5-1)/2=1+2=3$

$|d_i|=2$ $r=6$ $k=4$ $r_m=6+(4-1)/2=6+3/2=7{,}5$

$|d_i|=3$ $r=10$ $k=2$ $r_m=10+(2-1)/2=10+1/2=10{,}5$

$|d_i|=4$ $r=12$ $k=2$ $r_m=12+(2-1)/2=12+1/2=12{,}5$

valeur observée de V^+ : $v^+ = 3+3+7{,}5+3=16{,}5$

valeur observée de V^- : $v^-= 105-16{,}5= 88{,}5$

① ***loi exacte de la statistique de test*** $\mathbf{V^+}$ ***sous l'hypothèse nulle*** (peu d'ex æquo et $n=14<20$)

sous H_0 : $M = M_0$

la statistique de test V^+ est quantitative discrète sur {0, …, 105} symétrique, de moyenne 105/2=52,5

- degré de signification du test unilatéral gauche (région de rejet à gauche du domaine de variation de $\mathbf{V^+}$***)***

le degré de signification est la probabilité sous H_0 d'observer une valeur de la statistique de test V^+ au plus égale à la valeur $v^+=16{,}5$ observée car sous l'hypothèse H_1 on attend "peu" de valeurs positives de D avec des rangs faibles, donc de "petites" valeurs de V^+

$\alpha_{obs} = P_{H_0}(V^+ \le v^+) = P_{H_0}(V^+ \le 16{,}5) < P_{H_0}(V^+ \le 17) = 0{,}0123$

car $v=v^+=16{,}5>17>n=14$ table 3 colonne $n=14$ et ligne $v-n=17-14=3$

- décision

$\alpha_{obs} < 0{,}0123 \le \alpha=5\%$ donc on rejette H_0 en faveur de H_1 au risque $\alpha=5\%$

② ***loi de la statistique de test sous l'hypothèse nulle*** *:* approximation normale (présence d'ex æquo et $n=14 \ge 10$)

sous H_0 : $M = M_0$ les statistiques V^+ et V^- suivent approximativement une loi normale

de moyenne $\frac{n(n+1)}{4}$=105/2=52,5 et de variance $\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$=14×15×29/24=6090/24=253,75

donc la statistique de test $Z = \dfrac{V^+ - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$ suit approximativement une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

- valeur observée de la statistique de test : $z = \dfrac{16{,}5-52{,}5}{\sqrt{253{,}75}} = -2{,}26$

a. ***région de rejet du test unilatéral gauche au risque*** α***=5%***

$IR_{5\%} =]-\infty\,;-z_{0,95}] =]-\infty\,;-1{,}645]$ où $z_{0,95}=1{,}645$ est le quantile d'ordre $1-\alpha=95\%$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

décision : on observe $z= -2{,}26$ donc $z \in IR_{5\%}$ donc on rejette H_0 en faveur de H_1 au risque $\alpha=5\%$

b. ***degré de signification du test unilatéral gauche (région de rejet à gauche du domaine de variation de Z)***

le degré de signification est la probabilité sous H_0 d'observer une valeur de la statistique de test Z au plus égale à la valeur $z= -2{,}26$ observée car sous H_1 on attend de "petites" valeurs de Z

$\alpha_{obs} = P_{H_0}(Z \le -2{,}26) = F_Z(-2{,}26) = 1-F_Z(2{,}26) = 1-0{,}9881 = 0{,}0119$

où F_Z est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

décision : $\alpha_{obs} = 0{,}0119 \le \alpha=5\%$ donc on rejette H_0 en faveur de H_1 au risque $\alpha=5\%$

- ***conclusion***

la perte de poids X est significativement inférieure à la valeur théorique (M_0 =) 5 kg, au risque $\alpha=5\%$, donc la publicité est significativement mensongère au risque $\alpha=5\%$ et au degré de signification $\alpha_{obs}\approx1\%$

remarques

- les degrés de signification du test de Wilcoxon obtenus avec la table exacte de la loi ($0{,}0101 < \alpha_{obs} < 0{,}0123$) et avec l'approximation normale ($\alpha_{obs} = 0{,}0119$) sont très proches et aboutissent à la même conclusion
- les résultats des deux tests, signe et Wilcoxon, sont différents car si la variable étudiée est symétrique, le test de Wilcoxon est plus puissant que le test du signe puisqu'il tient compte non seulement du signe des différences à la médiane, mais aussi de leurs grandeurs (tailles) relatives

Exercice 2.5

$\mathcal{P}$ ={sinistres (accidents d'automobile) indemnisés en 1988 par une compagnie d'assurance} de taille N inconnue, X = montant (en £), variable quantitative de médiane M **inconnue** dans $\mathcal{P}$
$\mathcal{P}_0$ ={sinistres (accidents d'automobile) indemnisés en 1987 par la compagnie d'assurance } de taille N inconnue, X = montant (en £), variable quantitative de médiane M_0 **connue** dans $\mathcal{P}_0$: M_0=422 £

Ces observations confirment-elles, au risque α=5%, les craintes de la compagnie d'assurance ?

L'augmentation des indemnités payées par la compagnie d'assurance se traduit par le fait que la **médiane du montant en 1988** est supérieure à celle de 1987, c'est à dire **supérieure à 422 £** : ce sera l'hypothèse à accepter avec un minimum de risque, donc l'hypothèse alternative, que l'on acceptera à tort au risque d'erreur maximum de α=5%

Comparaison de la médiane *M inconnue* à la valeur théorique M_0=422

hypothèse nulle — H_0 : "la médiane du montant M dans $\mathcal{P}$ est égale à celle de 1987 (M_0 dans $\mathcal{P}_0$)" s'écrit $H_0 : M = M_0 = 422$

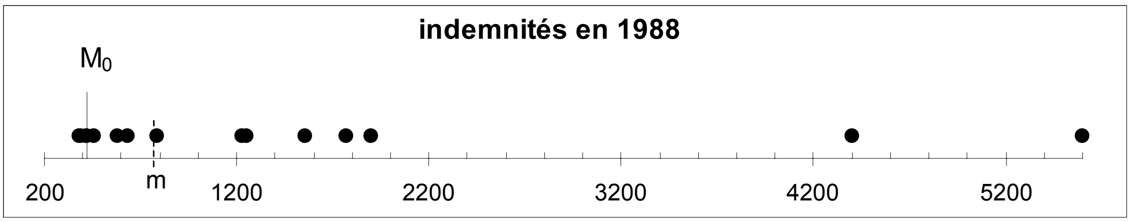
hypothèse alternative — H_1 : " la médiane du montant M dans $\mathcal{P}$ est supérieure à celle de 1987" s'écrit $H_1 : M > M_0 = 422$ unilatérale droite, au risque α=5%

❶ Comparaison d'une médiane à une valeur théorique : test du signe pour la médiane

sinistre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
montant X	386	394	421	422	457	581	633	790	1230	1250	1560	1770	1903	4399	5600
rang(X)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D=X–422	–36	–28	–1	0	35	159	211	368	808	828	1138	1348	1481	3977	5178
signe(D)	–	–	–		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

pour n impair la médiane observée m de X est égale à la $\left(\frac{n-1}{2}+1\right)^{\text{ème}} = \left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)^{\text{ème}}$ valeur ordonnée de X c'est à dire de rang $\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$

pour n=15 la médiane observée m de X est égale à la valeur de rang [n/2]+1=8 de X : m est égale à 790



La variable *signe*(D) où D=X–M_0=X–422, est qualitative dichotomique définie sur E={positif, négatif}, p proportion de signes strictement positifs **inconnue** dans $\mathcal{P}$

Comparaison de la proportion p *inconnue* à la valeur théorique p_0=50%=0,5

hypothèse nulle — $H_0 : p = p_0 = 50\%$

hypothèse alternative — $H_1 : p > p_0 = 50\%$ unilatérale droite, au risque α=5%

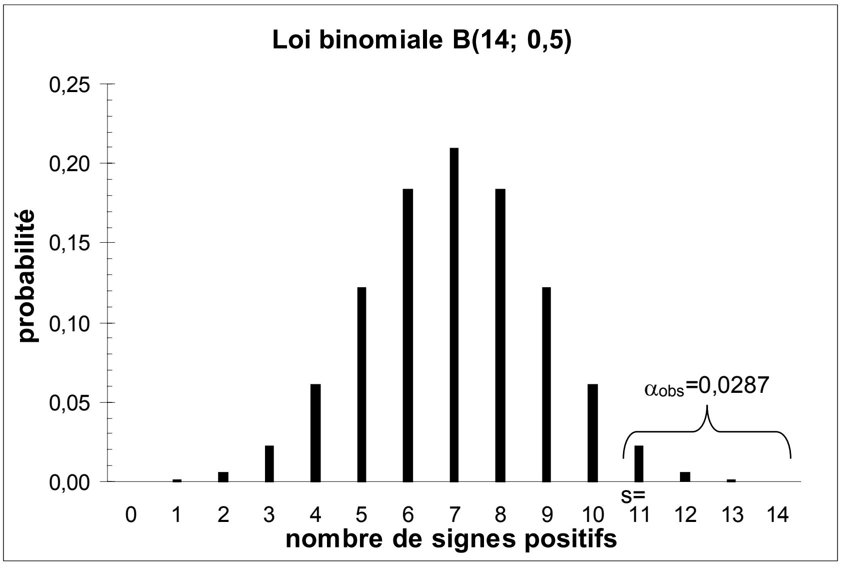
Echantillon de *signe*(D) issu de $\mathcal{P}$ de taille n= 14 (nombre de valeurs de D non nulles): estimation ponctuelle de p par f fréquence observée de signes strictement positifs dans l'échantillon avec s=11 donc f=11/14=0,818=81,8%

- loi de la statistique de test sous l'hypothèse nulle

sous $H_0 : p = p_0 = 0,5$

la statistique de test S_n effectif empirique de signes strictement positifs, quantitative discrète définie sur $\{0, \dots n\} = \{0, \dots 14\}$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_0) = \mathcal{B}(14; 0,5)$ symétrique, de moyenne $np_0 = 14\times0,5 = 7$

	$S_n \sim \mathcal{B}$ (14; 0,5)	
s	$P(S_n = s)$	$P(S_n \leq s)$
0	0,0001	0,0001
1	0,0009	0,0009
2	0,0056	0,0065
3	0,0222	0,0287
4	0,0611	0,0898
5	0,1222	0,2120
6	0,1833	0,3953
7	0,2095	0,6047
8	0,1833	0,7880
9	0,1222	0,9102
10	0,0611	0,9713
11	0,0222	0,9935
12	0,0056	0,9991
13	0,0009	0,9999
14	0,0001	1,0000



- degré de signification du test unilatéral droit (région de rejet à droite du domaine de variation de S_n)

le degré de signification est la probabilité sous H_0 d'observer une valeur de la statistique de test S_n au moins égale à la valeur s=11 observée car sous H_1 on attend "beaucoup" de valeurs de D positives, donc on prendra le risque de conclure H_1 (rejeter H_0 en faveur de H_1) à tort pour les "grandes" valeurs de S_n

$\alpha_{obs} = P_{H_0}(S_n \geq s) = P_{H_0}(S_n \geq 11) = 1 - P_{H_0}(S_n < 11) = 1 - P_{H_0}(S_n \leq 10) = 1 - F_{\mathcal{B}}(10) = 1 - 0,9713 = 0,0287$

où $F_{\mathcal{B}}$ fonction de répartition de la loi $\mathcal{B}(14; 0,5)$ donnée dans la table 1 (ligne n=14 colonne k=10)

ou

$\alpha_{obs} = P_{H_0}(S_n \geq s) = P_{H_0}(S_n \leq n-s) = P_{H_0}(S_n \leq 3) = F_{\mathcal{B}}(3) = 0,0287$ (table 1 ligne n=14 colonne k=3)

- décision

$\alpha_{obs} = 0,0287 < \alpha=5\%$ donc on rejette H_0 en faveur de H_1 au risque α=5%

- ***conclusion***

la proportion p de signes positifs de la différence de X à la valeur théorique (M_0 =) 422 £ est significativement supérieure à 50% au risque α=5% ; donc la médiane du montant M des indemnités en 1988 est significativement supérieure à la médiane du montant des indemnités en 1988 (422 £), au risque α=5% et au degré de signification $\alpha_{obs}\approx3\%$: confirmation des craintes de la compagnie d'assurance

❷ Comparaison d'une médiane à une valeur théorique : test de Wilcoxon (signes et rangs)

On admet que la distribution des indemnités (montants) X n'est pas symétrique dans $\mathcal{P}$ (par rapport à sa médiane M) donc on ne peut pas utiliser le test de Wilcoxon

Exercice 2.6

$\mathcal{P}$ ={insomniaques traités avec le nouveau médicament} de taille N inconnue, X = durée de sommeil (en h), variable quantitative de médiane M **inconnue** dans $\mathcal{P}$

$\mathcal{P}_0$ ={insomniaques avant traitement avec le nouveau médicament} de taille N inconnue, X = durée de sommeil (en h), variable quantitative de médiane M_0 **connue** dans $\mathcal{P}_0$: M_0=2 heures

Le nouveau médicament est-il efficace, au risque α=1% ?

Le nouveau traitement est efficace se traduit par le fait que **la durée de sommeil médiane** est supérieure à celle qu'avaient les sujets avant le nouveau traitement, c'est à dire **supérieure à 2h** : ce sera l'hypothèse à accepter avec un minimum de risque, donc l'hypothèse alternative, que l'on acceptera à tort au risque d'erreur maximum de α=1%

Comparaison de la médiane *M inconnue* à la valeur théorique M_0=2

hypothèse nulle $\quad$ H_0 : "la durée de sommeil médiane M dans $\mathcal{P}$ est égale à celle d'avant" s'écrit $H_0 : M = M_0 = 2$

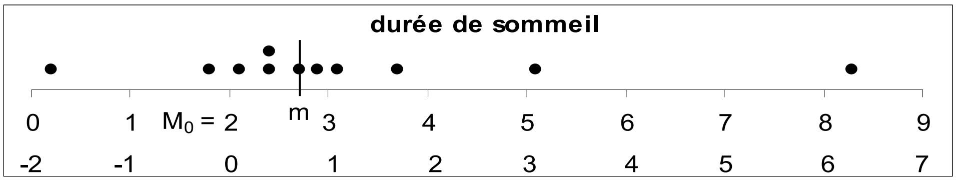
hypothèse alternative $\quad$ H_1 : "la durée de sommeil médiane M dans $\mathcal{P}$ est supérieure à celle d'avant" s'écrit $H_1 : M > M_0 = 2$ unilatérale droite, au risque α=1%

➊ Comparaison d'une médiane à une valeur théorique : test du signe pour la médiane

insomniaque	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
durée de sommeil X	3,1	1,8	2,7	2,4	2,9	0,2	3,7	5,1	8,3	2,1	2,4
rang(X)	8	2	6	5	7	1	9	10	11	3	4
D=X−2	1,1	−0,2	0,7	0,4	0,9	−1,8	1,7	3,1	6,3	0,1	0,4
signe(D)	+	−	+	+	+	−	+	+	+	+	+

pour n impair la médiane observée m de X est égale à la $\left(\frac{n-1}{2}+1\right)^{\text{ème}} = \left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)^{\text{ème}}$ valeur ordonnée de X c'est à dire de rang $\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$

pour n=11 la médiane observée m de X est égale à la valeur de rang [n/2]+1=6 de X : m est égale à 2,7



La variable *signe*(D) où D=X−M_0=X−2, est qualitative dichotomique définie sur E={positif, négatif}, p proportion de signes strictement positifs **inconnue** dans $\mathcal{P}$

Comparaison de la proportion *p inconnue* à la valeur théorique p_0=50%=0,5

hypothèse nulle $\quad H_0 : p = p_0 = 50\%$

hypothèse alternative $\quad H_1 : p > p_0 = 50\%$ unilatérale droite, au risque α=1%

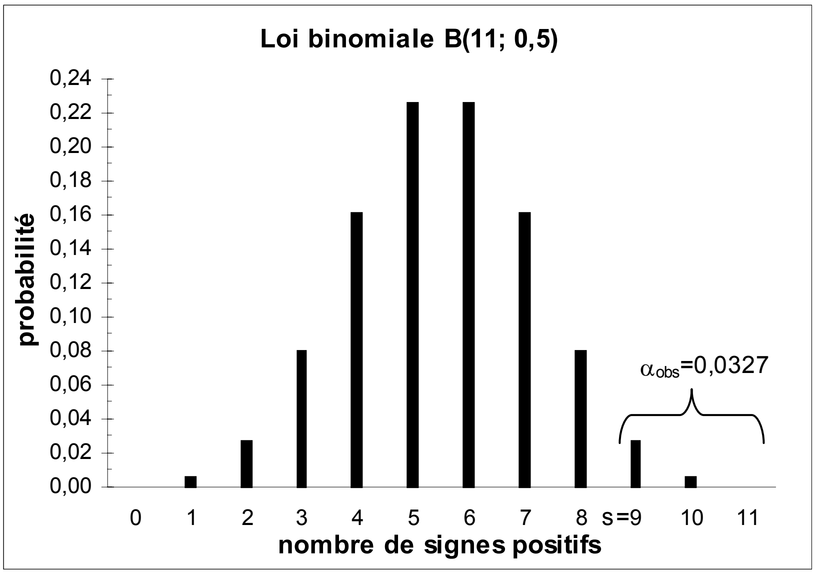
Echantillon de *signe*(D) issu de $\mathcal{P}$ de taille n= 11 (nombre de valeurs de D non nulles): estimation ponctuelle de p par f fréquence observée de signes strictement positifs dans l'échantillon avec s=9 donc f=9/11=0,818=81,8%

- loi de la statistique de test sous l'hypothèse nulle

sous $H_0 : p = p_0 = 0{,}5$

la statistique de test S_n effectif empirique de signes strictement positifs, quantitative discrète définie sur {0, … n} = {0, … 11} suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_0) = \mathcal{B}(11; 0{,}5)$ symétrique, de moyenne $np_0 = 11\times0{,}5 = 5{,}5$

	$S_n \sim \mathcal{B}(11; 0{,}5)$	
s	$P(S_n = s)$	$P(S_n \leq s)$
0	0,0005	0,0005
1	0,0054	0,0059
2	0,0269	0,0327
3	0,0806	0,1133
4	0,1611	0,2744
5	0,2256	0,5000
6	0,2256	0,7256
7	0,1611	0,8867
8	0,0806	0,9673
9	0,0269	0,9941
10	0,0054	0,9995
11	0,0005	1,0000



- degré de signification du test unilatéral droit (région de rejet à droite du domaine de variation de S_n)

le degré de signification est la probabilité sous H_0 d'observer une valeur de la statistique de test S_n au moins égale à la valeur s=9 observée car sous H_1 on attend "beaucoup" de valeurs de D positives, donc on prendra le risque de conclure H_1 (rejeter H_0 en faveur de H_1) à tort pour les "grandes" valeurs de S_n

$\alpha_{obs} = P_{H_0}(S_n \geq s) = P_{H_0}(S_n \geq 9) = 1 - P_{H_0}(S_n < 9) = 1 - P_{H_0}(S_n \leq 8) = 1 - F_{\mathcal{B}}(8) = 1 - 0{,}9673 = 0{,}0327$

où $F_{\mathcal{B}}$ fonction de répartition de la loi $\mathcal{B}(11; 0{,}5)$ donnée dans la table 1 (ligne n=11 colonne k=8)

ou

$\alpha_{obs} = P_{H_0}(S_n \geq s) = P_{H_0}(S_n \leq n-s) = P_{H_0}(S_n \leq 2) = F_{\mathcal{B}}(2) = 0{,}0327$ (table 1 ligne n=11 colonne k=2)

- décision

$\alpha_{obs} = 0{,}0327 > \alpha = 1\%$ donc on ne rejette pas H_0 au seuil α=1% et au risque β inconnu

- ***conclusion***

la proportion p de signes positifs de la différence de X à la valeur théorique (M_0 =) 2 h n'est pas significativement supérieure à 50%, au seuil α=1% et au risque β inconnu ; donc la durée de sommeil médiane M des insomniaques traités avec le nouveau traitement n'est pas significativement supérieure à la durée de sommeil médiane qu'ils avaient avant le traitement (2 heures), au seuil α=5% et au risque β inconnu

❷ Comparaison d'une médiane à une valeur théorique : test de Wilcoxon (signes et rangs)

On suppose que la durée de sommeil X est symétrique dans $\mathcal{P}$ (par rapport à sa médiane M)

insomniaque	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
durée de sommeil X	3,1	1,8	2,7	2,4	2,9	0,2	3,7	5,1	8,3	2,1	2,4
D=X−2	1,1	−0,2	0,7	0,4	0,9	−1,8	1,7	3,1	6,3	0,1	0,4
signe(D)	+	–	+	+	+	–	+	+	+	+	+
rang(|D|)	7	2	5	3,5	6	9	8	10	11	1	3,5

Echantillon de D où $D = X - M_0 = X - 2$ de taille n=11 (nombre de valeurs de D non nulles)

Statistiques de test V^+ somme des rangs de |D| associés aux valeurs positives de D, et V^- :

somme $V^+ + V^- = 11 \times 12/2 = 66$
ex æquo : $|d_i| = 0{,}4$ r=3 k=2 $r_m = 3 + (2-1)/2 = 3 + 1/2 = 3{,}5$

valeur observée de V^- : $v^- = 2 + 9 = 11$
valeur observée de V^+ : $v^+ = 66 - 11 = 55$

① ***loi exacte de la statistique de test*** $\mathbf{V^+}$ ***sous l'hypothèse nulle*** (peu d'ex æquo et n=11 <20)

sous H_0 : $M = M_0$

la statistique de test V^+ est quantitative discrète sur {0, …, 66} symétrique, de moyenne 66/2=33

- degré de signification du test unilatéral droit (région de rejet à droite du domaine de variation de $\mathbf{V^+}$***)***

le degré de signification est la probabilité sous H_0 d'observer une valeur de la statistique de test V^+ au moins égale à la valeur v^+=55 observée car sous l'hypothèse H_1 on attend "beaucoup" de valeurs positives de D avec des rangs élevés, donc de "grandes" valeurs de V^+

$\alpha_{obs} = P_{H_0}(V^+ \geq v^+) = P_{H_0}(V^+ \geq 55) = 1-P_{H_0}(V^+ \leq 54) = ?$

car v= v^+=54>n=11 table 3 colonne n=11 et la ligne v–n=54–11=43 n'existe pas

ou $\alpha_{obs} = P_{H_0}(V^+ \geq v^+) = P_{H_0}(V^- \leq v^-) = P_{H_0}(V^- \leq 11) \approx 0{,}0269$

car v=v^-=11≤n=11 table 2 colonne n=11 et ligne v=11

- décision

$\alpha_{obs} = 0{,}0269 > \alpha$=1% donc on ne rejette pas H_0 au seuil α=1% et au risque β inconnu

② ***loi de la statistique de test sous l'hypothèse nulle :*** approximation normale (présence d'ex æquo et n=11 ≥10)

sous H_0 : $M = M_0$ les statistiques V^+ et V^- suivent approximativement une loi normale

de moyenne $\dfrac{n(n+1)}{4}$=66/2=33 et de variance $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{24}$=11×12×23/24=3036/24=126,5

donc la statistique de test $Z = \dfrac{V^+ - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$ suit approximativement une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

- valeur observée de la statistique de test : $z = \dfrac{55-33}{\sqrt{126{,}5}} = 1{,}96$

a. ***région de rejet du test unilatéral droit au risque*** $\boldsymbol{\alpha}$***=1%***

$IR_{1\%} = [z_{0,99} ; +\infty[= [2{,}325 ; +\infty[$ où $z_{0,99}$=2,325 est le quantile d'ordre 1–α=99% de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

décision : on observe z= 1,96 donc $z \notin IR_{1\%}$ donc on ne rejette pas H_0 au seuil α=1% et au risque β inconnu

b. ***degré de signification du test unilatéral droit (région de rejet à droite du domaine de variation de Z)***

$\alpha_{obs} = P_{H_0}(Z \geq 1{,}96) = 1-P_{H_0}(Z \leq 1{,}96) = 1-F_Z(1{,}96) = 1-0{,}975 = 0{,}025$

où F_Z est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

décision : $\alpha_{obs} = 0{,}025 > \alpha$=1% donc on ne rejette pas H_0 au seuil α=1% et au risque β inconnu

- conclusion

la durée de sommeil n'est pas significativement supérieure à la valeur théorique (M_0 =) 2 heures, au seuil α=1% et au risque β, donc le nouveau médicament n'est pas significativement efficace au seuil α=1% et au risque β inconnu

remarques

- les degrés de signification du test de Wilcoxon obtenus avec la table exacte de la loi ($\alpha_{obs} \approx 0{,}0269$) et avec l'approximation normale ($\alpha_{obs} = 0{,}025$) sont très proches et aboutissent à la même conclusion
- les résultats des deux tests signe et Wilcoxon sont semblables pour cet exemple bien que le test de Wilcoxon soit plus puissant. On peut cependant remarquer que le degré de signification obtenu avec le test de Wilcoxon ($\alpha_{obs} = 0{,}025$) est plus faible que celui obtenu avec le test du signe ($\alpha_{obs} = 0{,}0327$)