

### Exercice 1

1) On applique un test psychologique à un échantillon de 32 sujets extraits d'une population d'individus âgés de 16 à 20 ans.

Pour chacun des 32 sujets, le temps de réaction  $X$  est mesuré en secondes. Les mesures sont résumées ci-après:  $\sum_{i=1}^{32} x_i = 1030$  et  $\sum_{i=1}^{32} x_i^2 = 54778$ .

Déterminer l'intervalle de confiance pour  $m_X$  au niveau de confiance 0,95 en justifiant les différentes étapes de sa construction.

2) On applique le même test psychologique à un autre échantillon de 8 individus. Voici les valeurs observées (en secondes):

51 18 25 23 35 42 8 45

Donner une estimation sans biais de la moyenne  $m_X$  du temps de réaction moyen puis de la variance du temps de réaction  $\sigma_X^2$ . Peut-on construire un intervalle de confiance pour la moyenne  $m_X$  en utilisant la même méthode que celle utilisée dans la question précédente?

### Exercice 2

On s'intéresse aux entreprises dont le chiffre d'affaires  $X$  est plus petit que  $a$ . On modélise la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$  par la densité:

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{\theta} a^{1/\theta} x^{(\frac{1}{\theta} - 1)} \mathbf{1}_{]0,a[}(x)$$

avec  $\theta > 0$  inconnu et  $a > 0$  connu.

On considère un  $n$ -échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  de loi  $f_{\theta}$ . On cherche à estimer le paramètre  $\theta$  à partir de cet échantillon.

1) Montrer que  $f_{\theta}(x)$  est une densité de probabilité.

- 2) Déterminer la fonction de vraisemblance de l'échantillon.
- 3) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$  que l'on notera  $T_n$ .

On note dans la suite  $Y = \ln\left(\frac{a}{X}\right)$ . On donne  $E(Y) = \theta$  et  $Var(Y) = \theta^2$ .

- 4) Montrer que l'on peut réécrire  $T_n$  sous la forme  $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ .
- 5) L'estimateur  $T_n$  est-il un estimateur sans biais de  $\theta$ ?
- 6) L'estimateur  $T_n$  est-il un estimateur convergent de  $\theta$ ?
- 7) Calculer l'information de Fisher de  $\theta$  apportée par l'échantillon.
- 8) L'estimateur  $T_n$  est-il un estimateur efficace de  $\theta$ ?
- 9) Donner la loi asymptotique de  $\sqrt{n} \frac{T_n - \theta}{\theta}$  quand  $n$  tend vers l'infini en justifiant la réponse.
- 10) En déduire un intervalle de confiance pour  $\theta$  au niveau de confiance 0,9 pour  $n$  grand.
- 11) Pour un échantillon de taille  $n = 200$ , on a observé  $t_n = 350$ . Calculer l'intervalle de confiance pour  $\theta$  au niveau de confiance 0,9.