

Le formulaire et les calculatrices sont autorisés. Tout autre document est interdit.

Exercice 1

On considère un échantillon (X_1, \dots, X_n) où X suit une loi normale de moyenne α et de variance $\alpha(1-\alpha)$ avec $0 < \alpha < 1$.

On se propose d'estimer α à l'aide de l'échantillon (X_1, \dots, X_n) . Pour cela on propose deux estimateurs:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ et } \hat{\alpha}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

1) Montrer que $\hat{\alpha}_1$ et $\hat{\alpha}_2$ sont des estimateurs convergents de α .

On donne $Var(X^2) = 2\alpha^2(1-\alpha^2)$.

2) Quel est le meilleur estimateur entre $\hat{\alpha}_1$ et $\hat{\alpha}_2$ au sens du risque quadratique? Discuter suivant la valeur de α .

Exercice 2

On considère un n -échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) de loi de densité

$$f_\lambda(x) = \frac{x}{\lambda^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\lambda^2}\right) \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(x)$$

avec $\lambda > 0$ inconnu.

On donne $E(X) = \lambda\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $E(X^2) = 2\lambda^2$ et $V(X^2) = 4\lambda^4$.

1) On cherche à estimer λ à partir de l'échantillon.

Donner un estimateur sans biais de λ .

2) On cherche à estimer $\theta = \lambda^2$ à partir de l'échantillon.

a- Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ .

b- Est-il sans biais, ?

c- Est-il convergent?

d- Est-il efficace?

3) Posons $T_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Donner la loi asymptotique de $\sqrt{n} \left(\frac{T_n}{2n} - \theta \right)$ quand n tend vers l'infini en justifiant la réponse.

Exercice 3

Un promoteur désire connaître le nombre de garages qu'il est souhaitable de construire afin que les locataires puissent y garer leur voiture. Pour cela, on interroge 4200 ménages. On trouve parmi eux 1050 possesseurs de voiture.

- 1) Donner une estimation ponctuelle de la proportion p des ménages possédant une voiture.
- 2) Déterminer l'intervalle de confiance pour p au niveau de confiance 0,95 en justifiant les différentes étapes de sa construction.
- 3) Dans quelle fourchette varie le nombre de garages à construire pour un ensemble de 450 appartements au niveau de confiance 0,95?