Université Paris X
DEUG Sciences Economiques deuxième année
Probabilité

Examen du 15 juin 2004

Tous documents interdits, calculatrices autorisées.

DUREE 2 HEURES

Questions de cours

1. Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs réelles.
   (i) Définir $\mathrm{var}(X)$. Donner une expression sous forme d'intégrale lorsque la loi de X admet la densité f sur $\mathbb{R}$.
   (ii) Exprimer $\mathrm{cov}(X, Y)$ en fonction de $\mathrm{var}(X+Y)$, $\mathrm{var}(X)$ et $\mathrm{var}(Y)$.
2. Enoncer le théorème de limite centrale (avec ses hypothèses précises).

Exercice 1. Deux écoles distinctes A et B forment des ingénieurs en informatique. L'école A forme 1/3 des ingénieurs de ces deux écoles. Une entreprise recrute ses ingénieurs informaticiens de ces deux écoles. A l'issue du recrutement on constate que 20% des ingénieurs de l'école A et 30% des ingénieurs de l'école B ont été recrutés par cette entreprise. On notera A, B, R les événements respectifs "l'ingénieur vient de l'école A", "l'ingénieur vient de l'école B" et "l'ingénieur est recruté".

(i) Calculer $P(R)$, la probabilité pour qu'un ingénieur (pris au hasard parmi tous les ingénieurs formés par ces deux écoles) soit recruté.
(ii) Quelle est la probabilité pour qu'un ingénieur pris au hasard provienne de l'école A sachant qu'il a été recruté.
(iii) Quelle est la probabilité pour qu'un ingénieur pris au hasard provienne de l'école B sachant qu'il a été recruté.

On exprimera les données de l'exercice en fonction des événements A, B et R, et on donnera les valeurs exactes des probabilités recherchées. On citera le nom des formules du cours utilisées.

Exercice 2. Soit $\alpha > 2$ et soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = cx^{-\alpha-1}$.

(i) Déterminer c en fonction de α pour que f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}_+$.
(ii) On choisit désormais c comme ci-dessus. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.

Tournez la page

(iii) Soit Y une variable aléatoire de même loi que X et indépendante de X. Déterminer la fonction de répartition et la densité de la variable $Z = \min(X, Y)$.

(iv) Calculer $\mathrm{E}[X]$ et $\mathrm{var}(X)$ en fonction de α.

(v) Déterminer α lorsque $\mathrm{E}[X] = 4/3$.

(vi) A l'aide de l'inégalité de Bienaymé Tchebychev, déterminer un $\epsilon > 0$ tel que $\mathrm{P}(|X - 4/3| > \epsilon) \leq 1\%$, pour α déterminé comme ci dessus.

Exercice 3. Une société emploie 2 342 personnes. On demande à 150 d'entre elles le nombre de leurs enfants on obtient les résultats suivants.

nombre d'enfants	0	1	2	3
nombre d'employés	78	48	19	5

On note X_i le nombre d'enfants du i-ème employé interrogé, $(1 \leq i \leq n = 150)$ et l'on suppose que les X_i sont des variables aléatoires indépendantes équidistribuées d'espérance m et de variance σ^2 inconnues.

(i) Calculer $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(ii) Calculer $\hat{\sigma}_n^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2$.

(iii) Lorsque n est grand, quelle loi la variable $Z = \sqrt{n}(\bar{X} - m)/\hat{\sigma}_n$ suit-elle approximativement.

(iv) En déduire un intervalle de confiance (asymptotique) à 95% pour le nombre moyen m d'enfants des employés de cette société.

Rappel. Soit Z une variable aléatoire de loi gaussienne centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. On donne : $\mathrm{P}(|Z| \leq 1,96) \approx 0,95$.

Université Paris X
DEUG Sciences Economiques deuxième année
Probabilité

Examen du 9 septembre 2004

Tous documents interdits, calculatrices autorisées.

DUREE 2 HEURES

Questions de cours

1. Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs réelles. Exprimer $\mathrm{cov}(X, Y)$ en fonction de $\mathrm{var}(X+Y)$ et $\mathrm{var}(X-Y)$.
2. Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi admet la densité f sur $\mathbb{R}$. Soit ϕ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner une expression sous forme d'intégrale de $\mathbb{E}[\phi(X)]$. Appliquer cette formule au cas où X suit la loi uniforme sur $[0,1]$ et $\phi(x) = x^2 + 3$.
3. Enoncer le théorème de limite centrale (avec ses hypothèses précises).

Exercice 1. Dans une population bisexuée, un gène peut être présent sous la forme de trois génotypes AA, Aa et aa. Au cours de la reproduction, chaque parent tire au hasard un de ses allèles (A ou a) et le transmet à son descendant, et les parents se choisissent au hasard. On veut déterminer la proportion des génotypes à la génération suivante, en admettant qu'il n'y a pas de reproduction inter-générations. On note X le génotype de la mère, Y celui du père et Z celui de l'enfant. A la génération initiale, on a $\mathbb{P}(X = AA) = \mathbb{P}(Y = AA) = u$, $\mathbb{P}(X = Aa) = \mathbb{P}(Y = Aa) = 2v$ et $\mathbb{P}(X = aa) = \mathbb{P}(Y = aa) = w$, avec $u + 2v + w = 1$.

1. Calculer $\mathbb{P}(Z = AA \mid X = AA, Y = AA)$, $\mathbb{P}(Z = AA \mid X = AA, Y = Aa)$, $\mathbb{P}(Z = AA \mid X = AA, Y = aa)$, etc. (en tout neuf probabilités conditionnelles à calculer.
2. En déduire $p = \mathbb{P}(Z = AA)$ en fonction de u et v. (Utiliser la formule des probabilités totales, donner une expression simple).
3. Calculer $r = \mathbb{P}(Z = AA \mid X = Aa)$.
4. On considère un enfant de type AA. Quelle est la probabilité pour que sa mère soit de type Aa ? Quelle formule faut-il utiliser ? (Exprimer le résultat avec p et r puis uniquement en fonctionde u, v, w si vous avez répondu aux questions précédentes)

Exercice 2. Soit $\alpha > 0$ et soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = cx^{\alpha-1}$.

(i) Déterminer c en fonction de α pour que f soit une densité de probabilité sur $[0,1]$.

(ii) On choisit désormais c comme ci-dessus. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.

(iii) Calculer $\mathrm{E}[X]$ et $\mathrm{var}(X)$ en fonction de α.

(iv) Déterminer α lorsque $\mathrm{E}[X] = 2/3$.

(v) A l'aide de l'inégalité de Bienaymé Tchebychev, déterminer un $\epsilon > 0$ tel que $\mathrm{P}(|X - 2/3| > \epsilon) \leq 1\%$, pour α déterminé comme ci dessus.

(vi) On ne suppose plus que α est déterminé comme précédemment. Soit Y une variable aléatoire de même loi que X et indépendante de X. Déterminer en fonction de α la fonction de répartition et la densité de la variable $Z = \max(X, Y)$.

Exercice 3. On veut savoir combien les foyers possèdent de poste de télévision. On examine 1500 déclarations au service de la redevance et on obtient les résultats suivants.

nombre de postes	0	1	2	3
nombre de personnes	89	948	419	44

On note X_i le nombre de postes du i-ème foyer interrogé, $(1 \leq i \leq n = 1500)$ et l'on suppose que les X_i sont des variables aléatoires indépendantes équidistribuées d'espérance m et de variance σ^2 inconnues.

(i) Calculer $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(ii) Calculer $\hat{\sigma}_n^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2$.

(iii) Lorsque n est grand, quelle loi la variable $Z = \sqrt{n}(\bar{X} - m)/\hat{\sigma}_n$ suit-elle approximativement.

(iv) En déduire un intervalle de confiance (asymptotique) à 95% pour le nombre moyen m de postes par foyer.

(v) Par une enquète auprès des vendeurs de postes de télévision, on a obtenu l'estimation $m = 1,31$. Peut-on en déduire qu'il y a fraude à la redevance ?

Rappel. Soit Z une variable aléatoire de loi gaussienne centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. On donne : $\mathrm{P}(|Z| \leq 1,96) \approx 0,95$.

Université Paris X
DEUG Sciences Economiques deuxième année
Probabilité

Examen du 14 juin 2005

Tous documents interdits, calculatrices autorisées.
Dans tous les exercices, on donnera si possible des réponses numériques exactes.

DUREE 2 HEURES

Questions de cours

1. Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs réelles. Donner une expression sous forme d'intégrale de $\text{var}(X)$ lorsque la loi de X admet la densité f sur $\mathbb{R}$. Si $\text{cov}(X, Y) = 0$, X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Enoncer le théorème de limite centrale (avec ses hypothèses précises).

Exercice 1. Dans un élevage, on a décelé une maladie A. La probabilité pour qu'un animal soit atteint par cette maladie est $2/10$. Sachant qu'un lapin est atteint par la maladie A, la probabilité qu'il présente une réaction positive à un test B est $9/10$. Par contre, s'il n'est pas atteint par la maladie A, la probabilité qu'il présente une réaction négative au test B est $95/100$.

(i) Calculer la probabilité pour qu'un lapin, pris au hasard, présente une réaction positive au test B.

(ii) En déduire la probabilité pour qu'un lapin, pris au hasard soit atteint par la maladie A sachant qu'il présente une réaction positive au test B.

Exercice 2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } 0 \leq x, y \leq 1 \ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(i) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

(ii) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles dont la loi jointe admet la densité f. X et Y sont-elles indépendantes ?

(iii) Montrer que X et Y ont la même loi marginale de densité

$$g(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} + u & \text{si } 0 \leq u \leq 1 \ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(iv) Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathrm{var}(X)$, $\mathrm{var}(Y)$ et $\mathrm{cov}(X,Y)$. Donner un nouvel argument pour répondre à la question (ii).

(v) Soit $Z = \min(X,Y)$. Calculer la fonction de répartition de Z, $F(z) = \mathbb{P}(Z \leq z)$. On tiendra bien compte de la réponse à la question (ii).

Exercice 3. On mesure le nombre d'oeufs pondus par 150 poules, et obtient les résultats suivants.

nombre d'oeufs	3	6	8	9
nombre de poules	28	68	31	23

On note X_i ($1 \leq i \leq n = 150$) le nombre d'oeufs de l'individu i et l'on suppose que les X_i sont des variables aléatoires indépendantes équidistribuées d'espérance m et de variance σ^2 inconnues.

(i) Calculer $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(ii) Donner la définition de l'estimateur empirique de la variance, noté $\hat{\sigma}_n^2$.

(iii) Lorsque n est grand, quelle loi la variable $Z = \sqrt{n}(\bar{X} - m)/\hat{\sigma}_n$ suit-elle approximativement.

(iv) En déduire un intervalle de confiance (asymptotique) à 95% pour m. On donne $\hat{\sigma}_n^2 = 3,79$.

Rappel. Soit Z une variable aléatoire de loi gaussienne centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. On donne : $\mathrm{P}(|Z| \leq 1,96) \approx 0,95$.

Université Paris X
DEUG Sciences Economiques deuxième année
Probabilité

Examen du 14 septembre 2005

Tous documents interdits, calculatrices autorisées.
Dans tous les exercices, on donnera si possible des réponses numériques exactes.

DUREE 2 HEURES

Questions de cours

1. Enoncer la formule des probabilités totales et la formule de Bayes.
2. Soient X une variable aléatoire à valeurs réelles. Donner une expression sous forme d'intégrale de $\mathbb{E}[X^2 - 2X + 1]$ lorsque la loi de X admet la densité f sur $\mathbb{R}$. Application : calculer $\mathbb{E}[X^2 - 2X + 1]$ lorsque X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
3. Enoncer le théorème de limite centrale (avec ses hypothèses précises).

Exercice 1. La proportion réelle des électeurs votant pour le candidat A est p. Au cours d'un sondage, un électeur qui va réellement voter pour le candidat A répond honnêtement avec la probabilité 90%. Ceux qui ne voteront pas pour A répondent honnêtement à 99%.

(i) Calculer en fonction de p la probabilité q pour qu'un électeur, pris au hasard, réponde qu'il va voter pour A.

(ii) En déduire en fonction de p la probabilité r pour qu'un électeur, pris au hasard, vote réellement pour A sachant qu'il a répondu qu'il vote pour A.

(iii) Application numérique. Calculer q et r lorsque $p = 5\%$ et $p = 45\%$.

Exercice 2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{5}{12}xy(1 + y) & \text{si } 0 \leq x, y \leq 1 \text{ ;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(i) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

(ii) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles dont la loi jointe admet la densité f. X et Y sont-elles indépendantes ?

(iii) Déterminer la loi marginale de X.

(iv) Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathrm{var}(X)$, $\mathrm{var}(Y)$ et $\mathrm{cov}(X, Y)$. Vérifier la cohérence de votre réponse avec celle que vous avez donnée à la question (ii).

Exercice 3. On mesure le nombre de pannes subies en un mois par 150 machines, et obtient les résultats suivants.

nombre de pannes	0	1	3	5
nombre de machines	28	68	31	23

On note X_i ($1 \leq i \leq n = 150$) le nombre de pannes de la machine i et l'on suppose que les X_i sont des variables aléatoires indépendantes équidistribuées d'espérance m et de variance σ^2 inconnues.

(i) Calculer $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(ii) Donner la définition de l'estimateur empirique de la variance, noté $\hat{\sigma}_n^2$.

(iii) Lorsque n est grand, quelle loi la variable $Z = \sqrt{n}(\bar{X} - m)/\hat{\sigma}_n$ suit-elle approximativement.

(iv) En déduire un intervalle de confiance (asymptotique) à 95% pour m. On donne $\hat{\sigma}_n^2 = 2,76$.

Rappel. Soit Z une variable aléatoire de loi gaussienne centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. On donne : $\mathrm{P}(|Z| \leq 1,96) \approx 0,95$.