UNIVERSITÉ DE PARIS OUEST-NANTERRE — ANNÉE 2011-2012

L1 ÉCO-GESTION — MATHÉMATIQUES RENFORCÉES

Devoir surveillé du 15 décembre 2011 — **Durée : 1 heure. Documents et calculatrices interdits.**

NOM Prénom : **UP** **Groupe**

Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées. Il sera tenu compte la qualité de la rédaction et notamment de l'orthographe.

Exercice 1. (i) Effectuer la division euclidienne de $X^4 - 1$ par $X^2 - 3X + 2$.

(ii) Les polynômes $X^4 - 2X - 3$ et $X^2 - 3X + 2$ ont-ils des diviseurs communs dans $\mathbb{R}[X]$? dans $\mathbb{C}[X]$?

(i) $X^4 - 1 = (X^2 - 3X + 2)(X^2 + 3X + 7) + 15X - 15$

On vérifie avec les valeurs 1 et 2 qui annulent $X^2 - 3X + 2$

(ii) $X^4 - 2X - 3 = (X+1)(X^3 - X^2 + X - 3)$

$X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$

Ces deux polynômes n'ont pas de racines communes dans $\mathbb{R}$ ni dans $\mathbb{C}$ donc n'ont pas de diviseurs communs ni dans $\mathbb{R}[X]$ ni dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2. (i) Déterminer le module et l'argument de $(\sqrt{3} + i)/2$.

(ii) Déterminer un nombre complexe $z = a + ib$ (a, b réels) tel que $(a + ib)^2 = (\sqrt{3} + i)/2$.

(iii) En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

(i) $\left|\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|^2 = \frac{3+1}{4} = 1$ et $\frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{i\pi/6}$

(ii) Si $(a+ib)^2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$, on a alors :

$a^2 + b^2 = |a+ib|^2 = \left|\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right| = 1$, $a^2 - b^2 = \mathrm{Re}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

et $2ab = \mathrm{Im}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0$ donc a et b sont de même signe.

On a de plus $a^2 = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

$b^2 = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

Les solutions sont donc z et $-z$ avec $z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

(iii) $e^{i\pi/12}$ est la racine de $e^{i\pi/6}$ dont les parties réelle et imaginaire sont positives, d'où

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 3. Linéariser $\cos(3x)\sin^3(x)$. (exprimer le résultat comme une somme de sinus uniquement)

$$\cos 3x \sin^3 x = \frac{1}{2}\cos 3x \sin x (1-\cos 2x)$$
$$= \frac{1}{4}(-\sin 2x + \sin 4x)(1-\cos 2x)$$
$$= -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x \cos 2x - \frac{1}{4}\sin 4x \cos 2x$$
$$= -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{8}\sin 6x - \frac{1}{8}\sin 2x$$
$$= -\frac{1}{8}\sin 6x + \frac{3}{8}\sin 4x - \frac{3}{8}\sin 2x$$

On a utilisé les formules $2\sin a \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$ et $2\sin^2 a = 1-\cos 2a$.

Exercice 4. Le but de cet exercice est de trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(2X^2+1)P'' - 12P = 0$.

(i) Si P est de degré n, $P = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$, montrer que le coefficient du terme de plus haut degré de $(2X^2+1)P''$ est $2n(n-1)a_n$.

(ii) En déduire qu'un polynôme solution de cette équation est nécessairement de degré 3.

(iii) Si $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, calculer $(2X^2+1)P'' - 12P$.

(iv) En déduire que toutes les solutions sont proportionnelles à un même polynôme de degré 3 que l'on déterminera.

(i) Si $P = a_nX^n + \cdots$ alors $P' = na_nX^{n-1} + \cdots$ et $P'' = n(n-1)a_nX^{n-2} + \cdots$.

Donc $(2X^2+1)P'' = 2n(n-1)a_nX^n + \cdots$

Le terme de plus haut degré de $(2X^2+1)P''$ est donc bien $2n(n-1)a_nX^n$.

(ii) Par égalité des coefficients de même degré de deux polynômes égaux, si P est solution de l'équation, on doit donc avoir $2n(n-1)a_n = 12a_n$.

Puisque $a_n \neq 0$, on a $n=3$.

(iii) $P'' = 6aX + 2b$ $\quad (2X^2+1)P'' = 12aX^3 + 4bX^2 + 6aX + 2b$.

$(2X^2+1)P'' - 12P = -8bX^2 + 6(a-2c)X + 2b - 12d$.

(iv) $(2X^2+1)P'' - 12P = 0 \iff b = d = 0$; $a = 2c$.

Les solutions sont donc de la forme $P = a(2X^3+X)$.

Rappels de trigonométrie $\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$; $\sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.