UNIVERSITÉ DE PARIS OUEST-NANTERRE — ANNÉE 2011-2012

L1 ÉCO-GESTION — MATHÉMATIQUES RENFORCÉES

Devoir surveillé du 15 décembre 2011 — **Durée : 1 heure. Documents et calculatrices interdits.**

NOM Prénom : **UP** **Groupe**

Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées. Il sera tenu compte la qualité de la rédaction et notamment de l'orthographe.

Exercice 1. (i) Effectuer la division euclidienne de X^4+1 par X^2+4X+4.

(ii) Les polynômes X^4+1 et X^2+1 ont-ils des diviseurs communs dans $\mathbb{R}[X]$? dans $\mathbb{C}[X]$?

(i) $X^4+1 = (X^2+4X+4)(X^2-4X+12) - 32X - 47$.
On vérifie avec les valeurs -2 (qui annule X^2+4X+4) et 0.

(ii) X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Ses racines dans $\mathbb{C}$ sont i et $-i$
$X^4+1 = (X^2+1)^2 - 2X^2 = (X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)$.
$X^2+\sqrt{2}X+1$ et $X^2-\sqrt{2}X+1$ sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
X^2+1 et X^4+1 n'ont donc pas de diviseurs communs dans $\mathbb{R}[X]$.
i et $-i$ ne sont pas racines de X^4+1, donc X^2+1 et X^4+1 n'ont pas de diviseurs communs dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2. (i) Déterminer le module et l'argument de $z_1 = (1+\ \ i)/\sqrt{2}$.

(ii) Déterminer un nombre complexe $z = a+ib$ (a, b réels) tel que $(a+ib)^2 = (1+i)/\sqrt{2}$.

(iii) En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

(i) $|z_1|^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$ $\quad \arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$ (cf. Rappel).

(ii) Si $(a+ib)^2 = z_1$ alors on a
$a^2+b^2 = |a+ib|^2 = |z_1| = 1$, $a^2-b^2 = \mathrm{Re}(z_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
et $2ab = \mathrm{Im}(z_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ donc a et b sont de même signe.
On a donc $a^2 = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ $\quad b^2 = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$
d'où les solutions z et $-z$ données par $z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

(iii) puisque $z_1 = e^{i\pi/4}$, on a que $e^{i\pi/8}$ est la racine de z_1 dont les parties réelle et imaginaire sont positives. D'où
$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Exercice 3. Linéariser $\cos(3x)\cos^3(x)$. (exprimer le résultat comme une somme de cosinus uniquement)

On utilise la formule $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.

$$\cos 3x \cos^3 x = \cos 3x \cos x \cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 3x \cos x (1+\cos 2x)$$
$$= \frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos x \cos 2x \cos 3x$$
$$= \frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}(\cos 3x + \cos x)\cos 3x$$
$$= \frac{1}{8}\cos 6x + \frac{3}{8}\cos 4x + \frac{3}{8}\cos 2x + \frac{1}{8}.$$

Exercice 4. Le but de cet exercice est de trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X^2+2)P'' - 6P = 0$.

(i) Si P est de degré n, $P = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$, montrer que le coefficient du terme de plus haut degré de $(X^2+2)P''$ est $n(n-1)a_n$.

(ii) En déduire qu'un polynôme solution de cette équation est nécessairement de degré 3.

(iii) Si $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, calculer $(X^2+2)P'' - 6P$.

(iv) En déduire que toutes les solutions sont proportionnelles à un même polynôme de degré 3 que l'on déterminera.

i) Le coefficient de plus haut degré de $(X^2+2)P''$ est celui de X^2P'' et donc celui de P''. Or on a :

$$P' = n a_n X^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \cdots$$
$$P'' = n(n-1)a_n X^{n-2} + (n-2)(n-1)a_{n-1}X^{n-3} + \cdots$$

donc le terme de plus haut degré de $(X^2+2)P''$ est $n(n-1)a_nX^n$, son coefficient est $n(n-1)a_n$.

(ii) L'égalité des polynômes implique que tous leurs coefficients sont égaux deux à deux. Donc $n(n-1)a_n = 6a_n$.
Puisque $a_n \neq 0$ par définition, on a donc $n(n-1) = 6$, soit $n = 3$.

iii) $P'' = 6aX + 2b$ $\quad (X^2+2)P'' = 6aX^3 + 2bX^2 + 12aX + 4b$

$$(X^2+2)P'' - 6P = 6aX^3 + 2bX^2 + 12aX + 4b - 6aX^3 - 6bX^2 - 6cX - 6d$$
$$= -4bX^2 + 6(2a-c)X + 4b - 6d$$

(iv) $(X^2+2)P'' - 6P = 0 \iff b = d = 0, \quad c = 2a.$

Les solutions sont donc de la forme $a(X^3+2X)$

Rappels de trigonométrie $\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$; $\sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.