UNIVERSITÉ DE PARIS OUEST-NANTERRE — ANNÉE 2011-2012

L1 ÉCO-GESTION — MATHÉMATIQUES RENFORCÉES

Devoir surveillé du 15 décembre 2011 — **Durée : 1 heure. Documents et calculatrices interdits.**

NOM Prénom : **UP** **Groupe**

Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées. Il sera tenu compte la qualité de la rédaction et notamment de l'orthographe.

Exercice 1. (i) Effectuer la division euclidienne de $X^4 - 1$ par $X^2 - 3X + 2$.

(ii) Les polynômes $X^4 + 1$ et $X^3 + 1$ ont-ils des diviseurs communs dans $\mathbb{R}[X]$? dans $\mathbb{C}[X]$?

i) $X^4 - 1 = (X^2 - 3X + 2)(X^2 + 3X + 7) + 15X - 15$.

On vérifie avec les valeurs 1 et 2 qui annulent $X^2 - 3X + 2$.

ii) $X^4 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$.

$X^3 + 1 = (X+1)(X^2 - X + 1)$.

Les deux polynômes n'ont donc pas de diviseurs communs dans $\mathbb{R}[X]$. Ils n'ont pas de racines communes dans $\mathbb{C}$ donc n'ont pas de diviseurs communs dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2. (i) Calculer le module et l'argument de $z_1 = (\sqrt{6} - i\sqrt{2})/2$ et $z_2 = 1 + i$.

(ii) En déduire le module et l'argument de $z = z_1 z_2$.

(iii) Utiliser les résultats précédents pour calculer $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

(i) $|z_1|^2 = \frac{6+2}{4} = 2$ donc $|z_1| = \sqrt{2}$. $\arg z_1 = -\pi/6$ (cf. Rappels)

$|z_2|^2 = 1 + 1 = 2$ donc $|z_2| = \sqrt{2}$. $\arg(z_2) = \frac{\pi}{4}$

(ii) On a donc $|z_1 z_2| = 2$ et $\arg(z_1 z_2) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

(iii) On déduit que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(z_1 z_2)$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(z_1 z_2)$

Soit $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 3. Linéariser $\sin(3x)\cos^3(x)$. (exprimer le résultat comme une somme de sinus uniquement)

On utilise les formules $2\sin p \cos q = \sin(p-q) + \sin(p+q)$
et $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.

$$\sin(3x)\cos^3 x = \frac{1}{2}\sin 3x \cos x\,(1+\cos(2x)) = \frac{1}{4}\big(\sin(4x)+\sin(2x)\big)\big(1+\cos(2x)\big)$$
$$= \frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{8}\sin(6x) + \frac{1}{8}\sin(2x) + \frac{1}{8}\sin(4x)$$
$$= \frac{1}{8}\sin(6x) + \frac{3}{8}\sin(4x) + \frac{3}{8}\sin(2x).$$

Exercice 4. Le but de cet exercice est de trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X^2+1)P'' - 6P = 0$.

(i) Si P est de degré n, $P = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$, montrer que le coefficient du terme de plus haut degré de $(X^2+1)P''$ est $n(n-1)a_n$.

(ii) En déduire qu'un polynôme solution de cette équation est nécessairement de degré 3.

(iii) Si $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, calculer $(X^2+1)P'' - 6P$.

(iv) En déduire que toutes les solutions sont proportionnelles à un même polynôme de degré 3 que l'on déterminera.

(i) Le coefficient de plus haut degré de $(X^2+1)P''$ est celui de X^2P'' et donc celui de P''. Or on a

$P' = na_nX^{n-1} + \dots$ $\qquad P'' = n(n-1)a_nX^{n-2} + \dots$

Donc $(X^2+1)P'' = n(n-1)a_nX^n + \dots$

Le coefficient de plus haut degré de $(X^2+1)P''$ est donc $n(n-1)a_n$.

(ii) L'égalité des polynômes implique que leurs coefficients sont égaux deux à deux. Donc $n(n-1)a_n = 6a_n$. Puisque $a_n \neq 0$ par définition, on a donc $n(n-1) = 6$, d'où $\underline{n=3}$.

(iii) $P'' = 6aX + 2b$; $(X^2+1)P'' = 6aX^3 + 2bX^2 + 6aX + 2b$

$(X^2+1)P'' - 6P = -4bX^2 + 6(a-c)X + 2b - 6d$

(iv) $(X^2+1)P'' - 6P = 0 \iff b = d = 0$; $a = c$.

Les solutions sont donc de la forme $a(X^3+X)$.

Rappels de trigonométrie $\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$; $\sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.