Université Paris Ouest — Licence Sciences Economiques première année

Corrigé du devoir surveillé de Mathématiques du 10 mai 2010

Exercice 1. Soient $U = (1, 1, -1)$, $V = (1, 2, 0)$ et $W = (3, 4, -2)$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$.

(i) Les vecteurs U, V, W forment-ils une famille libre ?

Corrigé Non, car $W = 2U + V$.

(ii) Donner l'équation du sous-espace E engendré par (U, V, W).

Corrigé On remarque de plus que U et V sont linéairement indépendants, donc le sous-espace vectoriel engendré par (U, V, W) est un plan. Une équation de ce plan est

$$2x - y + z = 0.$$

(On vérifie que U, V et W vérifient cette équation.)

(iii) Donner une base et la dimension de E.

Corrigé E est un plan et (U, V) en forme une base car U et V sont linéairement indépendants.

(iv) Soit $T = (3, 5, -1) \in \mathbf{R}^3$. Donner les coordonnées de T dans la base de E.

Corrigé On vérifie tout d'abord que T est bien dans E car ses coordonnées vérifient l'équation de E. On trouve ensuite $T = U + 2V$. Ses coordonnées dans la base (U, V) de E sont donc $(1, 2)$.

Exercice 2. Soit le système linéaire suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} y - z &=& 3 \\ x + y + 2z &=& 2 \\ 2x + y + 2z &=& 3 \end{array}\right.$$

(i) Résoudre le système (S) par la méthode du pivot de Gauss.

Solution L'unique solution du système est $(1, 7/3, -2/3))$.

(ii) Ecrire matriciellement le système sous la forme $A \cdot X = b$ en précisant les valeurs de A, X et b.

Corrigé On peut écrire le système sous la forme $AX = b$ en posant

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ .$$

(iii) Calculer l'inverse de A par la méthode de la matrice témoin.

Solution

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

(iv) En déduire la solution du système (S).

Corrigé La solution du système est $A^{-1}b$. On retrouve bien le résultat trouvé à la question (i).

Exercice 3. Soient $U = (2, 1, -1)$, $V = (3, 0, -1)$, $W = (1, 1, m)$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$ et $m \in \mathbf{R}$.

(i) Donner l'équation du sous-espace vectoriel P engendré par U et V.

Corrigé U et V étant linéairement indépendants, ils engendrent un plan. Une équation de ce plan est $x + y + 3z = 0$.

(ii) Pour quelles valeurs de m la famille (U, V, W) est-elle libre ? liée ? En déduire, selon la valeur de m, la dimension du sous espace vectoriel engendré par (U, V, W).

Corrigé La famille (U, V, W) est liée si et seulement si W appartient au plan P, i.e. si et seulement si ses coordonnées satisfont l'équation de P, soit $1 + 1 - 3m = 0$, soit $m = 2/3$. La famille (U, V, W) est libre et le sous-espace engendré par U, V et W est l'espace $\mathbf{R}^3$ entier si et seulement si $m \neq 2/3$; la famille est liée et le sous-espace engendré par U, V, W est le plan d'équation $x+y+3z = 0$ si et seulement si $m = 2/3$.

(iii) Déterminer l'ensemble des vecteurs de $\mathbf{R}^3$ simultanément orthogonaux à U et V.

Corrigé L'ensemble des vecteurs orthogonaux à U et V est la droite dont un vecteur directeur est $T = (1, 1, 3)$.

(iv) En déduire une base orthogonale de $\mathbf{R}^3$ contenant U et V.

Corrigé *Il y a une imprécisiion dans l'énoncé car U et V ne sont pas orthogonaux, donc en peuvent faire partie d'une base orthogonale.* On va donc remplacer U par un vecteur U' de P, orthogonal à V. On peut choisir par exemple $U' = (1, -10, 3)$. La base (U', V, T) est alors une base orthogonale de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 4. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Soit I_3 la matrice identité de taille 3×3. Trouver M tel que $A = I_3 - M$ et calculer M^2 et M^3.

Corrigé La matrice M est définie par $M = I_3 - A$, soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

On obtient alors

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

et $M^3 = 0$.

(ii) En déduire A^3, puis A^n.

Corrigé Puisque la matrice identité commute avec toutes les matrices et puisque $M^3 = 0$, on peut appliquer la formule du binôme, on obtient,

$$A^2 = (I_3 - M)^2 = I_3 - 2M + M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$A^3 = (I_3 - M)^3 = I_3 - 3M + 3M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = (I_3 - M)^n = I_3 - C_n^1 M + C_n^2 M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{n(n+1)}{2} & n & 1 \end{pmatrix} .$$

(iii) Montrer que $(I_3 - M)(I_3 + M + M^2) = I_3$.

Corrigé Puisque I_3 commute avec toute matrice et M commute avec ses puissances, on a

$$(I_3 - M)(I_3 + M + M^2) = I_3 + M + M^2 - M - M^2 - M^3 = I_3 .$$

(iv) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Corrigé L'inverse de A est donc

$$A^{-1} = I - M + M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$