*Ce contrôle avait duré **40 mn** et était noté sur **12 points***

(feuille à joindre à la copie)

UPX-Nanterre L3 Gestion Apprentissage	**STATISTIQUES**	Nom : .... Prénom : ....

Contrôle 1 : Bases
25 Octobre 2007

Exercice 1

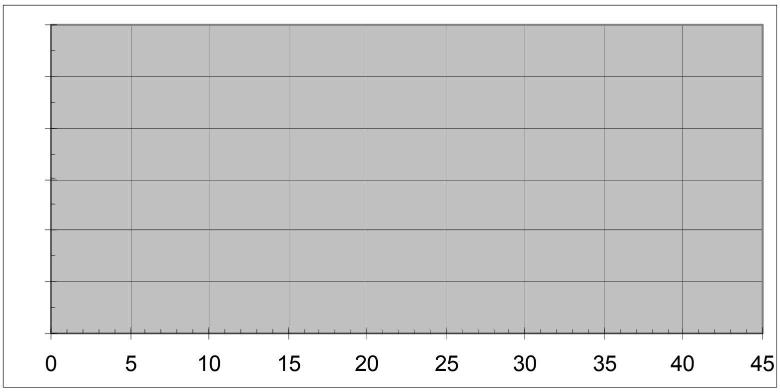
a. On a relevé la note de satisfaction x attribuée au produit ABC par 10 utilisateurs:

5 4 4 4 4 4 4 4 4 5

Faire le tableau présentant la distribution des notes. Calculer la note moyenne et l'écart-type des notes

b. *(Porter tous les calculs et résultats sur cette feuille, rien sur la copie)*
Sur un autre échantillon, les âges des utilisateurs se répartissent comme suit :

Age	Effectif	Prop.
17-25	10	
25-30	35	
30-40	5	



Déterminer la répartition en proportion;
Représenter ci-contre la fonction de répartition (préciser l'échelle sur l'axe vertical et la variable portée sur l'axe horizontal);
Par simple lecture du graphique, déterminer la limite d'âge correspondant à 70% des plus jeunes utilisateurs : ....(marquer sur la 'courbe' le point correspondant)

Exercice 2

Le produit PQR est acheté par 10% des foyers ; une enquête téléphonique va interroger 6 familles au hasard ; on note X le nombre aléatoire de familles consommatrices du produit parmi les 6.

a- Quel est le nom de la loi suivie par X, la signification et la valeur des paramètres qui la caractérisent ?

b- Exprimer et calculer la probabilité que 4 familles sur les 6 soient consommatrices du produit.
Etablir la distribution de probabilité de X, associant ses valeurs possibles aux probabilités correspondantes (à trouver dans la table).

c- Calculer l'espérance mathématique (par 2 méthodes), la variance et l'écart-type de X (d'après le résultat de cours).

Exercice 3

La variable aléatoire Z suit la loi Normale de moyenne 0 et d'écart-type 1; la Variable X suit $\mathcal{N}(60 ; 5)$

a- Déterminer la valeur de $P(Z< 1,54)$ Illustrer et calculer : $P(Z> 2,36)$ $P(Z< - 1,54)$ $P(Z< -2,36)$

b- Déterminer le quantile de Z correspondant à la probabilité 0,75 et l'intervalle de variation contenant 50% des valeurs les plus probables de Z.

c- Déterminer la valeur de : $P(X<72)$ $P(X>68)$ $P(X<52)$

d- Déterminer le quantile de X correspondant à la probabilité 0,75 et l'intervalle de variation contenant 50% des valeurs les plus probables de X.

Exercice 1. a-

note xi	effectif ni
4	8
5	2
total	10

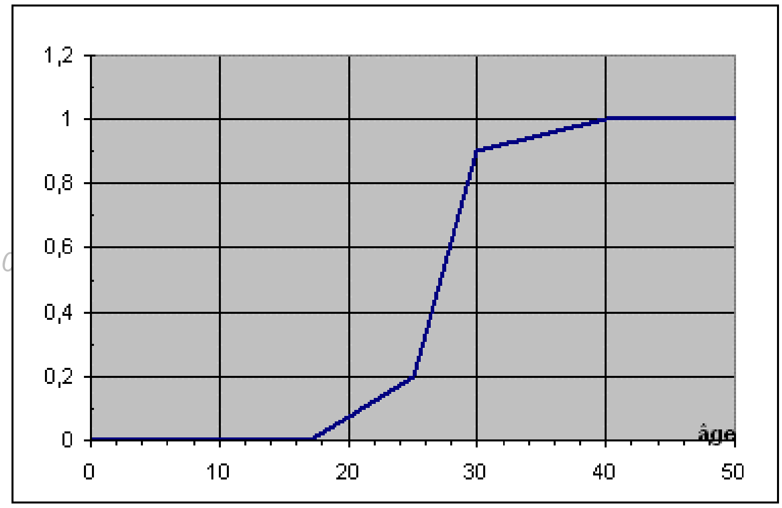
Moyenne : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{I} n_i \times x_i}{n} = \frac{8\times4+2\times5}{10} = \frac{32+10}{10} = 4{,}2$

Écart-type : $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{I} n_i \times x_i^2\right)}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{8\times4^2+2\times5^2}{10} - 4{,}2^2} = \sqrt{\frac{178}{10} - 17{,}64} = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$

b- Les proportions de chacune des classes d'âge sont respectivement :
0.2 , 0.7 et 0.1

La fonction de répartition ci-contre est définie par les 4 points dont les coordonnées sont les couples du tableau ci-dessous :

jusqu'à	prop cum
17	0
25	0,2
30	0,9
40	1,0



Sur la ligne brisée : le point d'ordonnée 0,7 (proportion cumulée de 70%) a une abscisse voisine de 28 (légèrement supérieure) :
70% des utilisateurs, les plus jeunes, ne dépassent pas 28 ans .

Exercice 2

a- X suit une loi Binomiale de paramètres n= 6 (nb de familles interrogées) et p= 0,1 (probabilité que la famille soit consommatrice du produit considéré)

b- P(X=4 / X ~B(6 ;0,1) = $C_6^4\ 0{,}1^4\ (1-0{,}1)^{6-4}$ = 15 × 0,0001 × 0,81 = 0,0012

X peut prendre 7 valeurs entières x , avec les probabilités indiquées ci-contre: Ce tableau définit la distribution de probabilité de X .

x	0	1	2	3	4	5	6	Total
P(X=x)	0,531	0,354	0,098	0,015	0,001	0.000	0.000	1,00

c- $E(X) = \sum_{x=0}^{6} x \times P(X=x) = 0 + 0{,}354 + 2\times0.098 + 3\times0.015 + 4\times0.001 + 0 + 0 = 0{,}599$

X suit loi binomiale B(n ;p)→ X a pour Espérance mathématique E(X) = n×p
et pour Variance V(X) = n×p×(1-p)

donc ici E(X) = 6×0,1= 0,6 et V(X) = 6×0,1×0,9= 0,54 ; d'où $\sigma = \sqrt{V(X)} = 0{,}735$

Exercice 3

a- P(Z< 1,54) = 0,9382
P(Z<-1,54) = P(Z>1,54)=1- P(Z<1,54)=1- 0,9382 = 0,0618
P(Z> 2,36)=1- P(Z< 2,36)= 1- 0,9909= 0,0091
P(Z< -2,36)= P(Z>2,36) = 0,0091 (déjà calculé)

b- Le quantile de Z correspondant à la probabilité 0,75 est noté $z_{0,75}$; il est défini par P(Z< $z_{0,75}$) =0,75
La table indique P(Z<0,67) =0,7486 donc $z_{0,75}$ ~ 0,67 (plus précise, la table page 9, pour Q= 0,75, donne z = 0.6745)
L'intervalle de variation contenant 50% des valeurs les plus probables de Z est noté $I_{0,5}$; il laisse 25% des valeurs à sa gauche et 25% à sa droite, : il est donc limité à gauche par $z_{0,25}$ et à droite par $z_{0,75}$ (ces 2 quantiles sont symétriques par rapport à zéro, c.àd. opposés) : $I_{0,5}$ = (-0,67 ; 0,67)

c- *2 manières de rédiger sont proposées ci-dessous* ; [attention à ne mettre le signe d'égalité qu'entre 2 expressions ayant la même valeur numérique ou exprimant la même chose]

Première rédaction possible : proposée sur le premier calcul ;
Autre rédaction possible, proposée sur les 2 calculs suivants.
Dans les 2 cas, ce qui est encadré ci-dessous est indispensable*

$P(X<72)$= ?

$$\boxed{\text{la Variable X suit } N(60\,;5) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X-60}{5} \text{ suit } N(0\,;1) \quad [\text{ On notera Z la V.A. } \frac{X-60}{5}]}$$

Première rédaction possible : $X < 72 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X-60}{5} < \frac{72-60}{5}$

« seuil » pour X : 72 $\Leftrightarrow$ « seuil réduit » pour Z : $\frac{72-60}{5}=2{,}4$

$X<72 \quad \Leftrightarrow \quad Z<2{,}4$

$P(X<72) \quad = \quad P(Z<2{,}4)$

d'où : $P(X<72) = 0{,}9918$

Autre rédaction possible :

$P(X>68)$ $= P(\frac{X-60}{5} > \frac{68-60}{5}) = P(Z> 1{,}6) = 1- 0{,}9452 = 0{,}0548$

$P(X<52)$ $= P(\frac{X-60}{5} < \frac{52-60}{5}) = P(Z<-1{,}6) = P(Z> 1{,}6) = 0{,}0548$ (d'après question précédente)

d- Le **quantile** de X correspondant à la probabilité 0,75 sera ici noté $x_{0,75}$;
la Variable X suit N(60 ; 5) donc $\frac{X-60}{5}$ suit N(0 ;1) ; on la notera Z
Première rédaction possible :
$P(X< x_{0,75}) = P(\frac{X-60}{5} < \frac{x_{0.75}-60}{5}) = P(Z< \frac{x_{0.75}-60}{5})=0{,}75$;
le quantile $x_{0,75}$ se déduit de $z_{0,75}$: $\frac{x_{0.75}-60}{5} = z_{0,75} = 0{,}67$;
on obtient : $x_{0,75}= 5\times z_{0,75} + 60 = 5\times0{,}67 + 60 = 63{,}35$; ou avec plus de précision $x_{0,75}= 5\times0{,}6745 + 60 = 63.37$;
[Vérification possible: calculer $P(X<63.37)$ …. le résultat est-il bien 0,75 ?]

Autre rédaction possible :
le quantile $x_{0,75}$ se déduit de $z_{0,75}$
$P(Z<0{,}6745) =0{,}75 \quad \Leftrightarrow \quad P(\frac{X-50}{10} <0{,}6745)=0{,}75 \quad \Leftrightarrow \quad P(X<0{,}6745\times5 +60)=0{,}75$
$\Leftrightarrow$ $P(X<63{,}37)=0{,}75$ $\Leftrightarrow$ 63,37 est le quantile de X correspondant à la probabilité 0,75.

L'**intervalle de variation** cherché est $I_{0.5}(X) = (x_{0,25}\,;x_{0,75})$
De même que ci-dessus : $x_{0,25}= 5\times z_{0,25} + 60 = 5\times(-0{,}6745) + 60 = 56{,}63$
et l'intervalle de variation contenant 50% des valeurs les plus probables de X et $I_{0,5}(X) = (56.63\,;63.37)$

oooooooooooooooooooo

* c'est en effet ce qui explique - pourquoi vous centrez et réduisez la variable X,
- pourquoi vous lisez dans la table de la loi N(0 ;1)

C'est donc ce qui valide votre résultat final.