III La recherche du portefeuille à incertitude (variance) minimale

Compte tenu que toutes les liquidités doivent être investies dans les N actifs financiers, la fonction d'incertitude de la rentabilité du portefeuille P s'écrit

$$L(Rp) = V(Rp) + \lambda.\left[1 - \sum_{i=1}^{N} X_i\right] \quad \text{avec} \quad \mathrm{V}(Rp) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i \,.X_j \,.\, \mathrm{Cov}(R_i, R_j)$$

Avec un nombre d'actifs financiers égal à trois (N=3), la fonction d'incertitude de la rentabilité du portefeuille P se formule comme

$$L(Rp) = [X_1^2.\sigma^2(R_1) + X_2^2.\sigma^2(R_2) + X_3^2.\sigma^2(R_3)$$
$$+2.X_1.X_2.\rho_{1,2}.\sigma(R_1).\sigma(R_2)+2.X_1.X_3.\rho_{1,3}.\sigma(R_1).\sigma(R_3) + 2.X_2.X_3.\rho_{2,3}.\sigma(R_2).\sigma(R_3)] + \lambda.[1 - (X_1+X_2+X_3)] \text{ si N=3}$$

L'incertitude s'avère donc optimale si les dérivées premières de cette fonction par rapport aux variables X_1, X_2, X_3 et λ sont toutes nulles, c'est-à-dire si

$$\mathrm{dL(Rp)/dX_1} = 2.\mathrm{X_1}.\sigma^2(\mathrm{R_1}) + 2.\mathrm{X_2}.\rho_{1,2}.\sigma(\mathrm{R_1}).\sigma(\mathrm{R_2}) + 2.\mathrm{X_3}.\rho_{1,3}.\sigma(\mathrm{R_1}).\sigma(\mathrm{R_3}) - \lambda = 0$$

$$\mathrm{dL(Rp)/dX_2} = 2.\mathrm{X_2}.\sigma^2(\mathrm{R_2}) + 2.\mathrm{X_1}.\rho_{1,2}.\sigma(\mathrm{R_1}).\sigma(\mathrm{R_2}) + 2.\mathrm{X_3}.\rho_{2,3}.\sigma(\mathrm{R_2}).\sigma(\mathrm{R_3}) - \lambda = 0$$

$$\mathrm{dL(Rp)/dX_3} = 2.\mathrm{X_3}.\sigma^2(\mathrm{R_3}) + 2.\mathrm{X_1}.\rho_{1,3}.\sigma(\mathrm{R_1}).\sigma(\mathrm{R_3}) + 2.\mathrm{X_2}.\rho_{2,3}.\sigma(\mathrm{R_2}).\sigma(\mathrm{R_3}) - \lambda = 0$$

$$\mathrm{dL(Rp)} / \mathrm{d}\lambda = 1 - \mathrm{X_1} - \mathrm{X_2} - \mathrm{X_3} = 0$$

En passant à droite tous les constantes (λ et 1), vous obtenez alors le système d'équations suivant

$$2.\mathrm{X_1}.\sigma^2(\mathrm{R_1}) + 2.\mathrm{X_2}.\rho_{1,2}.\sigma(\mathrm{R_1}).\sigma(\mathrm{R_2}) + 2.\mathrm{X_3}.\rho_{1,3}.\sigma(\mathrm{R_1}).\sigma(\mathrm{R_3}) = \lambda$$

$$2.\mathrm{X_2}.\sigma^2(\mathrm{R_2}) + 2.\mathrm{X_1}.\rho_{1,2}.\sigma(\mathrm{R_1}).\sigma(\mathrm{R_2}) + 2.\mathrm{X_3}.\rho_{2,3}.\sigma(\mathrm{R_2}).\sigma(\mathrm{R_3}) = \lambda$$

$$2.\mathrm{X_3}.\sigma^2(\mathrm{R_3}) + 2.\mathrm{X_1}.\rho_{1,3}.\sigma(\mathrm{R_1}).\sigma(\mathrm{R_3}) + 2.\mathrm{X_2}.\rho_{2,3}.\sigma(\mathrm{R_2}).\sigma(\mathrm{R_3}) = \lambda$$

$$\mathrm{X_1} - \mathrm{X_2} - \mathrm{X_3} = 1$$

ou encore, si vous remplacez les coefficients de corrélation et les écart-types ci-dessous des taux de rentabilité des actifs 1, 2 et 3

Coefficients de corrélation	**Actif 1**	**Actif 2**	**Actif 3**
Actif 1	1	0,4472136	-0,632455532
Actif 2	0,447213595	1	-0,848528137
Actif 3	-0,632455532	-0,8485281	1
Ecarts-type σ[Ri]	1,0000%	2,2361%	3,1623%

par leurs valeurs avant de multiplier chaque équation par 10.000, vous obtenez alors le système d'équations

$2\,.\mathrm{X}_1 + \ 2\,.\mathrm{X}_2 - \ 4\,.\mathrm{X}_3 = 10000\,.\lambda$ Equation (1)

$2\,.\mathrm{X}_1 + 10\,.\mathrm{X}_2 - 12\,.\mathrm{X}_3 = 10000\,.\lambda$ Equation (2)

$-4\,.\mathrm{X}_1 - 12\,.\mathrm{X}_2 + 20\,.\mathrm{X}_3 = 10000\,.\lambda$ Equation (3)

$1\,.\mathrm{X}_1 + \ 1.\ \mathrm{X}_2 + \ 1\,.\mathrm{X}_3 = 1$ Equation (4)

Si vous soustrayez l'équation (1) de l'équation (2), vous avez : $8\,.\mathrm{X}_2 - 8\,.\mathrm{X}_3 = 0$ d'où $\mathbf{X_2 = X_3}$

d'où, vous obtenez (en intégrant ce résultat à l'équation (4)) : $\mathrm{X}_1 = 1 - 2\,.\mathrm{X}_2$

L'intégration de ces deux derniers résultats dans le système d'équation précédent conduit au système d'équations

$2\,.\mathrm{X}_1 - 2\,.\mathrm{X}_2 = 10000\,.\lambda$ Equation (1')

$2\,.\mathrm{X}_1 - 2\,.\mathrm{X}_2 = 10000\,.\lambda$ Equation (2')

$-4\,.\mathrm{X}_1 + 8\,.\mathrm{X}_2 = 10000\,.\lambda$ Equation (3')

$1\,.\mathrm{X}_1 + 2.\ \mathrm{X}_2 = 1$ Equation (4')

L'égalité entre les équations (2') et (3') vous permet de poser l'égalité suivante : $2 . X_1 - 2 . X_2 = -4 . X_1 + 8 . X_2$ ou $6 . X_1 = 10 . X_2$

ou encore $\mathbf{X_2 = (6/10) . X_1 = X_3}$

Après substitution dans l'équation (4'), vous obtenez $X_1 + 2 . X_2 = (1 + (12/10). X_1 = 1$

d'où vous avez : $\mathbf{X_1 = 5/11}$ et $\mathbf{X_2 = X_3 = [6/10] . X_1 = 3/11}$

Les dérivées secondes de la fonction L(Rp) étant positives, vous pouvez déterminer l'espérance, la varaiance et l'écart-type des taux de rentabilité du portefeuille P comme le montre le tableau ci-dessous.

Actif i	**Actif 1**	**Actif 2**	**Actif 3**	**Portefeuille P**
Rentabilité espérée E[Ri]	5,0000%	8,0000%	10,0000%	**7,18182%**
Variance des taux de rentabilité V[Ri]	0,010%	0,0500%	0,1000%	**0,00182%**
Ecart-type anticipé σ[Ri]	1,0000%	2,2361%	3,1623%	**0,42640%**
Proportion Xi dans le portefeuille P	5/11	3/11	3/11	**100,00000%**

Conclusion : La diversification entre les actifs 1, 2 et 3 est avantageuse en terme de rentabilité-incertitude. L'incertitude (représentée par l'écart-type du taux de rentabilité) attachée au portefeuille P est inférieure à l'incertitude (représentée par l'écart-type du taux de rentabilité) attachée à chaque actif 1, 2 et 3 alors même que l'espérance du taux de rentabilité du portefeuille P est supérieure l'espérance du taux de rentabilité de l'actif 1.

Le portefeuille P domine donc l'actif 1. Dominé, l'actif 1 ne fait donc pas partie de la frontière efficiente.