II - L'espérance et l'écart-type de la rentabilité du portefeuille P s'écrivent respectivement

E[Rp] = Xa . E[Ra] + Xb. E[Rb] et $\mathbf{V[Rp] = Xa^2 . V[Ra] + Xb^2 . V[Rb] + 2 . Xa . Xb . Cov[Ra, Rb]}$

En présence d'une covariance Cov[Ra, Rb] = ρ(Ra, Rb) . σ(Ra) . σ(Rb) = 0 avec un coefficient de corrélation ρ(Ra, Rb) = 0,

E[Rp] = Xa . E[Ra] + Xb . E[Rb] et $\mathbf{V[Rp] = Xa^2 . V[Ra] + Xb^2 . V[Rb]}$

Avec la contrainte de budget Xa + Xb = 100 %, la fonction d'incertitude attachée à la variance du taux de rentabilité du portefeuille P

$$L(Rp) = V(Rp) + \lambda.[1 - Xa - Xb] = L(Rp) = Xa^2 . V[Ra] + Xb^2 . V[Rb] + \lambda. . [1 - Xa - Xb]$$

est minimale quand les dérivées premières par rapport aux proportions Xa, Xb et au lagrangien λ sont toutes nulles et quand les dérivées secondes sont toutes strictement positives. La première condtion d'optimalité conduit au système d'équations

$$dL(Rp)/dXa = 2. Xa . \sigma^2(Ra) - \lambda = 0 \qquad \text{Equation (1)}$$
$$dL(Rp)/dXb = 2. Xb . \sigma^2(Rb) - \lambda = 0 \qquad \text{Equation (2)}$$
$$dL(Rp)/d\lambda = 1 - Xa - Xb = 0 \qquad \text{Equation (3)}$$

La soustraction de l'équation (2) de l'équation (1) conduit à poser l'égalité $Xa . \sigma^2(Ra) = Xb . \sigma^2(Rb)$ Compte tenu que Xb = 1 - Xa,
la proportion optimale d'actifs A $\mathbf{Xa^* = \sigma^2(Rb) / [\sigma^2(Ra) + \sigma^2(Rb)]}$ et la proportion optimale d'actifs B $\mathbf{Xb^* = \sigma2(Ra) / [\sigma2(Ra) + \sigma2(Rb)]}$

Les dérivées secondes de la fonction L(Rp) étant positives, la fonction d'incetitude est donc bien minimale. Comme vous pouvez le voir dans le tableau ci-dessous, vous pouvez maintenant calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type et du portefeuille P sachant que la corr 0,00%

	Proportions	Taux de rentabilité espéré	Variance des taux de rentabilité	Ecart-type des taux de rentabilité
A	73,529%	5,0000%	0,0900%	3,00%
B	26,471%	10,0000%	0,2500%	5,00%
Portefeuille P	100,000%	**6,3235%**	0,06618%	**2,57248%**

Conclusion : La diversification entre les actifs A et B est avantageuse en terme de rentabilité-incertitude. L'incertitude (représentée par l'écart-type du taux de rentabilité) attachée au portefeuille P est en effet inférieure à l'incertitude (représentée par l'écart-type du taux de rentabilité) attachée à chaque actif A et B. Compte tenu que l'espérance du taux de rentabilité du portefeuille P est supérieure à l'espérance du taux de rentabilité de l'actif A, le portefeuille P domine ici l'actif A qui ne peut donc pas être considéré comme un actif efficient.