I Etude de la relation entre les actifs

A] Recherche de la corrélation entre les actifs B et C

Si $\rho(Ra,Rb)$ est égal à l'unité, ceci signifie que la rentabilité Ra de l'actif A et la rentabilité Rb de l'actif B évoluent parallèlement et proportionnellement.

Autrement dit, si **Rb = x . Ra**

on a

l'espérance de la rentabilité de l'actif A	$E[a]$
la variance de la rentabilité de l'actif A	$\sigma^2[Ra] = [E(Ra^2) - E(Ra)^2]$
l'espérance de la rentabilité de l'actif B	$E[Rb] = x \cdot E[Ra]$
la variance de la rentabilité de l'actif B	$\sigma^2[Rb] = [E(Rb^2) - E(Rb)^2] = x^2 \cdot \sigma^2[Ra]$
la covariance entre les rentabilités des deux actifs A et B	$Cov[Ra,Rb] = E[Ra.Rb] - E[Ra].E[Rb] = x \cdot \sigma^2[Ra]$

Après substitutions, le coefficient de corrélation $\rho(Ra, Rb)$ entre les actifs A et B est alors égal à $\rho(Ra, Rb) = Cov[Ra,Rb] / [\sigma(Ra).\sigma(Rb)] = x.\sigma^2(Ra)/x.\sigma^2(Ra) = 1$

De manière similaire, le coefficient de corrélation entre la rentabilité de l'actif B et la rentabilité de l'actif C s'écrit sous la forme

$$\rho(Rb, Rc) = Cov[Rb, Rc] / [\sigma(Rb) \cdot \sigma(Rc)] = E[Rb.Rc] - E[Rb].E[Rc] / [\sigma(Rb) \cdot \sigma(Rc)]$$

Compte tenu que $Rb = x \cdot Ra$, on a : $E[Rb] = x \cdot E[Ra]$ et $\sigma[Rb] = x \cdot \sigma[Ra]$

le coefficient de corrélation entre la rentabilité de l'actif B et la rentabilité de l'actif C s'écrit

$$\rho(Rb, Rc) = (x \cdot E[Ra.Rc] - x \cdot E[Ra].E[Rc]) / [x \cdot \sigma(Ra) \cdot \sigma(Rc)]$$

ou, après simplifications, $\rho(Rb, Rc) = E[Ra.Rc] - E[Ra].E[Rc]) / [\sigma(Ra) \cdot \sigma(Rc)] = Cov[Ra, Rc] / [\sigma(Ra) \cdot \sigma(Rc)] = \rho(Ra, Rc)$

Si le coefficient de corrélation entre l'actif et A et la rentabilité de l'actif B est égal à l'unité, le coefficient de corrélation entre la rentabilité de l'actif B et la rentabilité de l'actif C est alors égal au coefficient de corrélation entre la rentabilité de l'actif A et la rentabilité de l'actif C. **Dans le cas particulier où $\rho(Ra,Rc) = 0$, on a alors $\rho(Rb,Rc) = 0$.**

B] La variance des portefeuilles P1 et P2

1) Composé des actifs A et B en proportion Xa et Xb=1-Xa, le portefeuille P1 dégage un taux de rentabilité Rp1 = Xa.Ra + (1-Xa).Rb

L'espérance et l'écart-type de la rentabilité du portefeuille P1 s'écrivent respectivement

$E[Rp1] = Xa \,.\, E[Ra] + (1-Xa) \,.\, E[Rb]$ et $V[Rp1] = Xa^2 \,.\, V[Ra] + (1-Xa)^2 \,.\, V[Rb] + 2 \,.\, Xa \,.\, (1-Xa) \,.\, Cov[Ra, Rb]$

En présence d'une covariance $Cov[Ra, Rb] = \rho(Ra, Rb) \,.\, \sigma(Ra) \,.\, \sigma(Rb) = \sigma(Ra) \,.\, \sigma(Rb)$ avec un coefficient de corrélation $\rho(Ra, Rb) = 1$,

$\mathbf{E[Rp1] = Xa \,.\, E[Ra] + (1-Xa).\, E[Rb]}$ et $\mathbf{V[Rp1] = Xa^2 \,.\, V[Ra] + (1-Xa)^2 \,.\, V[Rb] + 2 \,.\, Xa \,.\, (1-Xa) \,.\, \sigma(Ra) \,.\, \sigma(Rb)}$

2) Composé des actifs A et C en proportion Xa et Xc=1-Xa, le portfeuille P2 dégage un taux de rentabilité Rp2 = Xa.Ra + (1-Xa).Rc

L'espérance et l'écart-type de la rentabilité du portefeuille P2 s'écrivent respectivement

$E[Rp2] = Xa \,.\, E[Ra] + (1-Xa).\, E[Rc]$ et $V[Rp2] = Xa^2 \,.\, V[Ra] + (1-Xa)^2 \,.\, V[Rc] + 2 \,.\, Xa \,.\, (1-Xa) \,.\, Cov[Ra, Rc]$

En présence d'une covariance $Cov[Ra, Rc] = \rho(Ra, Rc) \,.\, \sigma(Ra) \,.\, \sigma(Rc) = 0$ avec un coefficient de corrélation $\rho(Ra, Rc) = 0$,

$\mathbf{E[Rp2] = Xa \,.\, E[Ra] + (1-Xa) \,.\, E[Rc]}$ et $\mathbf{V[Rp2] = Xa^2 \,.\, V[Ra] + (1-Xa)^2 \,.\, V[Rc]}$

Conclusion : si Xa > 0 et si V[Rb] > V[Rc], l'incertitude mesurée par l'écart-type σ(Rp1) du taux de rentabilité du portefeuille P1 se révèle supérieure à l'incertitude mesurée par l'écart-type σ(Rp2) du taux de rentabilité du portefeuille P2 .

Note : Dans le cas particulier où Xa = 100% (ou 1 - Xa = 0%), l'incertitude du portefeuille P1, mesurée par l'écart-type σ(Rp1) du taux de rentabilité Rp1 , est égale à l'incertitude du portefeuille P2 mesurée par l'écart-type σ(Rp2) du taux de rentabilité Rp2 (σ[Rp1] = σ[Rp1]).