

Objectif de l'investisseur : Maximiser l'espérance de l'utilité de son investissement (avec ou sans contrainte de liquidité)

Fonction d'utilité	Probabilité	VAN	Utilité	
Projet 1	15%	800,00 €	0	utilon utilons
Projet 2	85%	1 200,00 €	20	

A] Caractéristiques du projet d'investissement (espérance, écart-type et utilité espérée)

Approche à partir des bornes de la fonction d'utilité	Probabilité	VAN	Utilité [VAN]	
Projet 1	15%	800,00 €	0,00	utilons
Projet 2	85%	1 200,00 €	20,00	
Projet d'investissement (espérance mathématique)		1 140,00 €	17,00	
$E(VAN^2) =$		1 320 000,00		
Variance de la VAN		20 400,00		
Ecart-type de la VAN		142,83 €		

Approche à partir des coefficients de la fonction d'utilité	A =	B =	C =	Espérance de la fonction d'utilité
Coefficients de $U[VAN]$	0,000075	-0,1	32	
$E[U(VAN)] =$	$A \cdot VAN^2$	$+ B \cdot VAN$	$+ C$	$= A \cdot E(VAN^2) + B \cdot E(VAN) + C$
Projet 1	48,00	-80,00	32,00	0,00
Projet 2	108,00	-120,00	32,00	20,00
Projet d'investissement (avec l'opérateur Espérance)	99,00	-114,00	32,00	17,00

B] Utilité du projet Equivalent-certain (EC = Equivalent-Certain)

Projet équivalent-certain

Espérance mathématique

Probabilité	$U(EC) = E[U(VAN)]$	
100,00%	17,00	utilons

C] Equivalent-certain et prime de risque

L'espérance de l'utilité du projet réel et l'espérance d'utilité de son projet équivalent-certain s'écrivent respectivement sous la forme

$$\begin{aligned} E[U(VAN)] &= A \cdot E(VAN^2) + B \cdot E(VAN) + C \\ \text{et} \quad E[U(EC(VAN))] = U(EC(VAN)) &= A \cdot EC^2 + B \cdot EC + C \end{aligned}$$

Compte tenu que les deux projets présentent par définition la même utilité, la différence est nulle. On a :

$$U(EC(VAN)) - E[U(VAN)] = A \cdot EC^2 + B \cdot EC + C - E[U(VAN)] = 0$$

La résolution de cette équation conduit, en posant aux valeurs actuelles nettes équivalent-certain

$$\begin{aligned} \Delta &= (B^2) - (4 \cdot A \cdot (C - U(EC(VAN)))) = 0,00550 \\ EC1(VAN) &= (-B + \text{racine}(\Delta)) / (2 \cdot A) = 1\ 161,08 \text{ €} \\ EC2(VAN) &= (-B - \text{racine}(\Delta)) / (2 \cdot A) = 172,25 \text{ €} \end{aligned}$$

Compte tenu que la prime d'incertitude (de risque) "Pr" attachée à un projet est, par définition, égale à la rémunération pour l'incertitude (le risque) du projet, la prime d'incertitude (de risque) du projet est égale à l'espérance de rentabilité du projet nette de la rentabilité de son équivalent-certain.

Avec comme critère de rentabilité la VAN, la prime d'incertitude (de risque) **Pr** = **E(VAN) - EC(VAN)**
 et la valeur actuelle nette du projet équivalent-certain **EC(VAN) = E(VAN) - Pr**

Compte tenu que l'espérance de la valeur actuelle nette du projet **E(VAN) = 1 140,00 €**

1) Si madame Freeze est adverse au risque, elle ne peut avoir une prime de risque positive (E[VAN] > EC(VAN)) que si l'équivalent-certain de la valeur actuelle nette du projet est égale à **EC(VAN) = 172,25 €** induisant une prime = **967,75 €**

2) Si madame Freeze est neutre vis-à-vis du risque, elle ne peut avoir une prime de risque nulle (E[VAN] = EC(VAN)) que si l'équivalent-certain de la valeur actuelle nette du projet est égale à **EC(VAN) = 1 140,00 €** induisant une prime = **0,00 €**

3) Si madame Freeze est adverse au risque, elle ne peut avoir une prime de risque négative (E[VAN] < EC(VAN)) que si l'équivalent-certain de la valeur actuelle nette du projet est égale à **EC(VAN) = 1 161,08 €** induisant une prime = **-21,08 €**